GAL I (JSIM), 22 października 2021 r.

Zadanie 1. *Niech*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) > 0\} \quad \text{oraz} \quad E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) < -2\}$$

Czy istnieją liczby $w, u \in \mathbb{C}$ *takie, że dla każdego* $z \in \mathbb{C}$ *zachodzi* $z \in D \Leftrightarrow wz + u \in E$*?*

Zadanie 2. *Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory liczb* $z \in \mathbb{C}$ *spełniających warunki:*

1. $|z + 3 - i| > 3$.
2. $2 \leqslant |z| < |z - 2| < 4$.
3. $|z + 3 - i| + |z + 3 + i| \leqslant 2$.
4. $|1 + i - \overline{z}| < 2 - Rez$.
5. $Im(z^3) < Re(z^3)$.
6. $z \neq 1$ *oraz* $Im\frac{1}{z-1} < 1$.
7. $z \neq i$ *oraz* $Im\frac{1-iz}{1+iz} = 1$.
8. $z \neq 1 + i$ *oraz* $\pi/4 < \operatorname{Arg}(z - 1 - i) < \pi/2$.
9. $z \neq 0$ *oraz* $0 \leqslant Re(4/z), Im(4/z), Re(4/\overline{z}), Im(4/\overline{z}) \leqslant 1$.

Zadanie 3. *Niech* $A = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^4) > 0\}$*. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory* A *oraz* $f(A)$*, gdzie funkcja* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dana jest formułą*

$$f(z) = (1 + i)\overline{z} + 2.$$

Ile pierwiastków wielomianu $P(z) = z^3 + 1$ *leży w zbiorze* A*?*

Zadanie 4. *Niech*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) \geqslant 0\} \quad \text{oraz} \quad f(z) = (1 - i)z + 3, g(z) = -iz^4.$$

Naszkicuj D*,* $f(D), g^{-1}(D)$*.*

Zadanie 5. *Załóżmy, że* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ *są parami różne (tzn.* $z_j \neq z_k$ *dla* $j \neq k$*). Interpretując liczby* z_1, z_2, z_3, z_4 *jako punkty płaszczyzny udowodnij, że:*

1. *jeżeli* $[z_j, z_k]$ *oznacza odcinek na płaszczyźnie wyznaczony przez parę liczb* (z_j, z_k)*, to*

$$[z_1, z_2] \perp [z_3, z_4] \iff Re\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0 \quad \text{oraz} \quad [z_1, z_2] \parallel [z_3, z_4] \iff Im\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0.$$

2. *punkty* z_1, z_2, z_3 *leżą na jednej prostej (są współliniowe)* $\iff Im\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3} = 0$.
3. *punkty* z_1, z_2, z_3, z_4 *leżą na jednym okręgu* $\iff Im\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)} = 0$.

Zadanie 6. *W tym zadaniu wszystkie rozważane punkty leżą na okręgu jednostkowym* $|z| = 1$.

(a) *Pokaż, że* $ac + bd = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki* ac *oraz* bd *są prostopadłe.*

(b) *Pokaż, że jeśli* $a \neq b$*, to rzut dowolnego punktu* z *na* ab *opisany jest wzorem*

$$\frac{1}{2}(a + b + z - ab\overline{z}).$$

(c) *Pokaż, że punkt* p *leży na cięciwie* ab $|z| = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $p + ab\overline{p} = a + b$.

(d) *Ortocentrum trójkąta o wierzchołkach* a, b, c *to punkt* $h = a + b + c$

Z ostatniego punktu wywnioskuj, że środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum dowolnego trójkąta leżą na jednej prostej i stosunek odległości kolejnych par punktów to $1 : 2$.

* * *

Osobom zainteresowanym prostym zastosowaniom metod zespolonych w geometrii elementarnej polecam artykuł Joanny Jaszuńskiej: *Liczby zespolone w geometrii* (w ramach Deltoidu) i opisane tam przykłady: `http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2010/11/29/0905k25.pdf`.

Nieco bardziej zaawansowany tekst, z zastosowaniami zadań powyżej, jest autorstwa Evana Chena: `https://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf`.