GAL I (JSIM), 19 października 2021 r.

Zadanie 1. *Oblicz:* $\left(\cos(\frac{\pi}{5}) - i\sin(\frac{\pi}{5})\right)^{25}$, $(\sqrt{3}-i)^{32}$, $\left((\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)^{18}$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Zadanie 2. *W zależności od $n \in \mathbb{N}$ oraz dla tych $x \in \mathbb{R}$, dla których to jest możliwe, wyznacz postać trygonometryczną liczby*

$$z = \frac{(1 + i\cos(x) + \sin(x))^n}{(1 - i\cos(x) + \sin(x))^n}.$$

Zadanie 3. *Udowodnij, że*

$$\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}.$$

Zadanie 4. *Liczba zespolona z spełnia równanie $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\frac{\pi}{2000})$. Oblicz*

$$z^{1000} + \frac{1}{z^{1000}}.$$

Zadanie 5. *Wielomian $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste. Jego pierwiastkiem jest liczba $z = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$. Pokaż, że:*

$$a_{n-1}\sin(\phi) + a_{n-2}\sin(2\phi) + \ldots + a_0\sin(n\phi) = 0.$$

Zadanie 6. *Niech $P(z) = z^2 + az + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$. Wiadomo, że jeśli $|z| = 1$ to $|p(z)| = 1$. Pokaż, że $a = b = 0$.*

Zadanie 7. *Znajdź największą i najmniejszą wartość wyrażenia*

$$|1 + z| + |1 - z + z^2|,$$

dla $z \in \mathbb{C}$ takich, że $|z| = 1$.

Zadanie 8. *Rozwiąż równanie*

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x).$$

Zadanie 9. *Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi, że*

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 0.$$

Pokaż że

$$\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = \sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0.$$

Zadanie 10. *Niech z będzie liczbą zespoloną spełniającą warunek*

$$|z + 1| > 2.$$

Pokaż, że

$$|z^3 + 1| > 1.$$

Zadanie 11. $(*)$ *Wykaż, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość*

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}.$$

Wskazówka: rozważ odpowiednie potęgi liczb $z = \cos\frac{\pi}{2n+1} + i\sin\frac{\pi}{2n+1}$.