GAL I (JSIM), 15 października 2021 r.

Zadanie 1. *Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które są rozwiązaniami równań (opisz część rzeczywistą i urojoną rozwiązań):*

(a) $z^2 = i$,

(b) $(1+i)z^2 + (3-5i)z - 6 = 0$,

(c) $2z + 3\overline{z} - Re(z) + 2Im(z) = 8 - 3i$,

(d) $|z| + 3\overline{z} = 2 + 6i$,

(e) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$.

Zadanie 2. *Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, z_2 mamy:*

(a) $z + \overline{z} = 2Re(z), z \cdot \overline{z} = |z|^2$,

(b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

(c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *oraz gdy* $|z_2| \neq 0$ *mamy też* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,

(d) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Zadanie 3. *Wyznacz wszystkie liczby zespolone $z \neq 0$, dla których*

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. *Liczby zespolone z_1, z_2 spełniają równość $|z| = 1$. Pokaż, że*

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 5. *Wykaż, że wszystkie niezerowe rozwiązania z_0 równania*

$$(1+z)^n = (1-z)^n,$$

gdzie $z \in \mathbb{C}$ spełniają $Re(z_0) = 0$.

Zadanie 6. *Udowodnij, że jeśli z jest liczbą zespoloną spełniającą nierówności $|1+z| \leqslant 1$ oraz $|1+z^2| \leqslant 1$, wtedy $|z| \leqslant 1$.*

Zadanie 7. *Niech $z \neq 0$ będzie liczbą zespoloną spełniającą równość:*

$$\left|z + \frac{2}{z}\right| = 2.$$

Znajdź $\max|z|$.

Zadanie 8.

Liczby zespolone x, y, z spełniają równości:

$$|x| = |y+z|, \quad |y| = |x+z|, \quad |z| = |x+y|.$$

Pokaż, że $x + y + z = 0$.

Zadanie 9. *Załóżmy, że dla pewnego $n > 1$ oraz liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ oraz $w_1, \ldots, w_n$ zachodzą wszystkie 2^{n-1} nierówności postaci*

$$|z_1 \pm z_2 \pm z_3 \pm \ldots \pm z_n| \leqslant |w_1 \pm w_2 \pm w_3 \pm \ldots \pm w_n|.$$

Wykaż, że

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 \leqslant |w_1|^2 + |w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2.$$