GAL I (JSIM), 12 października 2021 r.

Zadanie 1. *Znajdź rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{cases}$$

Zadanie 2. *Niech* p *będzie liczbą pierwszą. Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} 5x + 3y &= 4 \\ 3x + 6y &= 1 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_p$*. Wynik podaj w postaci pary* (x, y)*, gdzie* $x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$*.*

Zadanie 3. *Wykaż, że przemienność dodawania wynika z pozostałych aksjomatów ciała.*

Zadanie 4. *Niech* $K = \{0, 1, a, b\}$ *będzie zbiorem 4-elementowym. Zaproponuj taką tabelkę dodawania i mnożenia w* K*, aby było ono ciałem. Na ile sposobów można to zrobić?*

Zadanie 5. *Czy piątka* $(\mathbb{Q}, +, \circ, 0, 0)$ *jest ciałem, gdzie* $+$ *to zwykłe dodawanie w* $\mathbb{Q}$*, zaś* $a \circ b = a + ab + b$*, dla* $a, b \in \mathbb{Q}$*? Czy istnieje takie „dodawanie”'* $\oplus$ *w zbiorze* $\mathbb{Q}$*, że piątka* $(\mathbb{Q}, \oplus, \circ, ?, 0)$ *jest ciałem?*

Zadanie 6. *Wykaż, że żaden właściwy podzbiór ciała* $\mathbb{Q}$ *nie jest podciałem ciała* $\mathbb{Q}$*.*

Zadanie 7. *Załóżmy, że* K *jest ciałem.*

- *Udowodnij, że zachodzi alternatywa* $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} \neq 0$*, dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *albo* $p \cdot 1 = 0$ *dla pewnej, jednoznacznie wyznaczonej, liczby pierwszej* p*. W pierwszym przypadku mówimy, że ciało* K *ma charakterystykę* 0*, a w drugim, że ma charakterystykę* p*.*
- *Niech* K *będzie ciałem skończonym. Pokazać, że dla każdego* $0 \neq a \in K$ *istnieje* n *takie, że* $a^n = 1$*.*

Zadanie 8. *Załóżmy, że* K *jest ciałem skończonym. Wykaż, że dla dowolnego* $x \in K$ *istnieją takie* $a, b \in K$*, że* $x = a^2 + b^2$*.*