GAL I (JSIM), 8 października 2021 r.

Zadanie 1. *Normalnym kwadratem magicznym rzędu n nazywamy macierz o wyrazach $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ taką, że n wyrazów w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na każdej z dwóch przekątnych ma tę samą sumę. Pokaż, że normalny kwadrat magiczny $A = (a_{ij})$ rozmiaru 3×3 spełnia $a_{22} = 5$. Ile jest różnych normalnych kwadratów magicznych rozmiaru 3×3?*

Zadanie 2. *Znajdź układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego wszystkie rozwiązania są postaci*

$$(-2t + 3, -t + 2, t + 1, 2t),$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. *Załóżmy, że ciągi $(1, 2, 3, 4)$ oraz $(2, 0, 0, 1)$ są rozwiązaniami pewnego układu równań liniowych nad $\mathbb{R}$. Wykaż, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.*

Zadanie 4. *Niech A będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych. Pokaż, że istnieje takie całkowite dodatnie d, że za pomocą operacji elementarnych na wierszach i kolumnach możemy doprowadzić A do postaci $D = (d_{ij})$, gdzie:*

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \leqslant d \\ 0, & w.p.p. \end{cases}.$$

Zadanie 5. *Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ będzie macierzą o wyrazach całkowitych i niech d będzie minimalnym niezerowym ekementem ze zbioru $\{|a_{ij}|, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Określamy „$\mathbb{Z}$-operacje elementarne" na wierszach i kolumnach macierzy A, czyli:*

- *dodanie do wiersza innego wiersza przemnożonego przez liczbę całkowitą,*
- *zamiana wierszy,*
- *przemnożenie wiersza przez niezerową liczbę całkowitą,*
- *dodanie do kolumny innej kolumny przemnożonej przez liczbę całkowitą,*
- *zamiana kolumn,*
- *przemnożenie kolumny przez niezerową liczbę całkowitą,*

Pokaż, ze jeśli nie można obniżyć d przez „$\mathbb{Z}$-operacje elementarne", to d dzieli wszystkie wyrazy A.

Zadanie 6. *Pokaż, że z pomocą „$\mathbb{Z}$-operacji elementarnych" na wierszach i kolumnach każdą niezerową macierz całkowitoliczbową rozmiaru d sprowadzić można do pewnej macierzy $A = (a_{ij})$, gdzie*

$$a_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases},$$

przy czym d_i jest dzielnikiem d_{i+1}, dla $i = 1, 2, \ldots, d - 1$.

Uwaga. Postać uzyskana w powyższym zadaniu nazywana jest „postacią kanoniczną Smitha". Jest ona przydatna w rozwiązywaniu tzw. liniowych równań diofantycznych. Osoby zainteresowane odsyłam do skryptu prof. A. Nowickiego: `https://www-users.mat.umk.pl/~anow/ps-dvi/dln-19w.pdf`. W dalszej części semestru poznamy kryterium rozwiązywalności takich układów równań w języku opisanym w powyższych notatkach (twierdzenie van der Waerdena). Pozwoli ono rozwiązać nastepujący problem: pokaż, że układ równań o współczynnikach całkowitych ma całkowite rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy posiada rozwiązanie modulo dowolna liczba całkowita dodatnia. Poniższe zadanie wyjaśnia pewne kwestie.

Zadanie 7. *Pokaż, że jeśli układ n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach całkowitych ma dokładnie jedno rozwiązanie modulo dowolna liczba pierwsza p (będące ciągiem reszt modulo p), to ma on również dokładnie jedno rozwiązanie całkowite. Czy zachodzi fakt odwrotny? Jak zmienia się odpowiedź jeśli zamiast założenia, że układ ma jednoznaczne rozwiązanie modulo p założymy, że układ jest niesprzeczny modulo p? Czy i wówczas musi istnieć rozwiązanie całkowite?*