GAL I (grupa 1),

Twierdzenie Cauchy'ego-Bineta

Twierdzenie 1 (Cauchy-Binet). *Niech $A \in M_{k\times n}(K)$ oraz $B \in M_{n\times k}(K)$. Wówczas*[1]

$$\det(AB) = \sum_J \det(A(J)) \det(B(J)),$$

gdzie J jest zbiorem multiindeksów postaci $(j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$ oraz $A(J)$ jest macierzą powstałą z kolumn macierzy A o indeksach J (w tej kolejności), zaś macierzy $B(J)$ powstaje z wierszy macierzy B o indeksach J (w tej kolejności).

Wniosek 1. *Zachodzi równość $\det(AA^T) = \sum\limits_J (\det A(J))^2$. W szczególności dla macierzy A o współczynnikach rzeczywistych mamy nierówność $\det(AA^T) \geqslant 0$.*

Zadanie 1. *Udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza: dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność $(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^n y_i^2) \geqslant (\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i)^2$.*

Zadanie 2. *Udowodnić tożsamość Lagrange'a: dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ zachodzi równość:*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Zadanie 3. *Pokazać, że dla liczb $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunek $x^2+y^2+z^2 = 3$ zachodzi nierówność $x + y(x + z) + z \leqslant 4$.*

Zadanie 4. *Pokazać, że dla $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunek $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$ zachodzi nierówność $(x + z)(y + t) \leqslant 1$.*

Zadanie 5. *Niech $a_i > 0$ oraz niech $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ spełniają, dla $n \geqslant 2$, warunki: $\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i = 0$ oraz $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Wówczas zachodzi nierówność:*

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right) \cdot \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2\right) \geqslant \sum_{i=1}^n a_i y_i^2.$$

Zadanie 6. *Dla $l \leqslant k$ oraz $X \in M_{l\times k}(\mathbb{R})$ przyjmijmy $N(X) = \sqrt{\Sigma}$, gdzie Σ jest sumą kwadratów wszystkich $l \times l$-minorów macierzy X. Udowodnić, że $N(X) = \sqrt{|XX^T|}$ oraz $N(AX) = N(A)N(X)$, dla $A \in M_{t\times t}\mathbb{R}$.*

Zadanie 7. *(**) (Cayley) Wykazać, że w grafie pełnym K_n o n wierzchołkach liczba drzew rozpinających równa jest n^{n-2}. To szczególny przypadek tzw. „Matrix-Tree Theorem" Kirchoffa, które podaje sposób wyznaczania liczby drzew rozpinających w dowolnym skończonym spójnym grafie (bez pętli), w zależności od pewnych macierzy powiązanych z tym grafem. Co zaskakujące - w dowodzie korzysta się właśnie z twierdzenia Cauchy'ego-Bineta. Wiąże się to z teorią obwodów elektrycznych... Patrz np. http://nptel.ac.in/courses/111104026/lecture36.pdf.*

---

[1] Patrz: `https://www.math.brown.edu/reschwar/M123/cauchy.pdf`.