GAL I (grupa 1),

Wzór permutacyjny

Zadanie 1. *Rozważmy permutacje*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 3 & 7 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oblicz znaki permutacji σ oraz τ. Wyznacz permutacje $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} oraz τ^{-1}. Przedstaw permutacje σ oraz τ jako iloczyny cykli rozłącznych.Przedstaw permutacje σ oraz τ jako iloczyny transpozycji.

Zadanie 2. *Niech $n \geqslant 1$ oraz $\sigma \in S_n$. Wykaż, że $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{|S|}$, gdzie*

$$S = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ oraz } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Zadanie 3. *Niech $n, m \geqslant 1$. Oblicz*

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+m \\ m+1 & \cdots & m+n & 1 & \cdots & m \end{pmatrix} \in S_{n+m}.$$

Zadanie 4. *Korzystając z definicji permutacyjnej wyznacznika oblicz:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 5. *Uzasadnij następujące zdania.*

- *Jeśli liczba wyrazów zerowych w macierzy A rozmiaru $n \times n$ jest większa niż $n(n-1)$, to $\det A = 0$.*
- *Jeśli w macierzy A rozmiaru $n \times n$ na przecięciu k wierszy i l kolumn znajdują się same zera, przy czym $k + l > n$, to $\det A = 0$.*

Zadanie 6. *Załóżmy, że $n \geqslant 1$ jest liczbą nieparzystą.*

1. *Dowiedź, że gdy permutacja $\sigma \in S_n$ spełnia $\sigma^2 = \mathrm{id}$, to σ ma* punkt stały.
2. *Wywnioskuj z punktu (1), że gdy dla macierzy* symetrycznej *$A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z})$ zachodzi $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$, to $\det A \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą.*

Zadanie 7. *Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in S_n$. Uzasadnij, że poniższa macierz jest nieodwracalna.*

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma_0(1) & \cdots & \sigma_0(n) \\ 1 & \sigma_1(1) & \cdots & \sigma_1(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_n(1) & \cdots & \sigma_n(n) \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{Q})$$