GAL I (grupa 1),

Wyznacznik Vandermonde'a, wzory Cramera i macierz dołączona

Przypomnienie. Niech A będzie macierzą wymiaru $n \times n$ o wyrazach (a_{ij}), gdzie $a_{ij} = a_j^{i-1}$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in K$. Wyznacznik $\det(A)$ oznaczamy przez $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$. Ma on wartość $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j)$.

Zadanie 1. *Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą liczbami zespolonymi o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej $k > 0$ zachodzi równość $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$. Pokazać, że $\lambda_i = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Zadanie 2. *Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ postaci:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & \ldots & n^3 \\ 1 & 2^5 & \ldots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3. *Rozwiąż układ równań postaci:*

$$\begin{cases} (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) & = 2 \\ (1+2x_1)(1+2x_2)\ldots(1+2x_n) & = 3 \\ \vdots & \\ (1+nx_1)(1+nx_2)\ldots(1+nx_n) & = n+1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. *Pokazać, że dla dowolnych liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ liczba $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{a_i - a_j}{i - j}$ jest całkowita.*

Zadanie 5. *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ oraz niech $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Pokazać, że*

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2.$$

Zadanie 6. *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Niech $f(x)$ oraz $g(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych takimi, że punkty $(f(1), g(1))$, $(f(2), g(2))$, $\ldots (f(n), g(n))$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ są wierzchołkami n-kąta foremnego (zgodnie z porządkiem przeciwnym do wskazówek zegara). Pokazać, że przynajmniej jeden z wielomianów $f(x)$ oraz $g(x)$ ma stopień większy lub równy $n - 1$.*

Zadanie 7. *Wykazać następujące fakty o macierzy $\mathrm{adj}(A)$, gdzie $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

(a) $r(A) = n \Longleftrightarrow r(\mathrm{adj}(A)) = n$,

(b) $r(A) = n - 1 \Longleftrightarrow r(\mathrm{adj}(A)) = 1$,

(c) $r(A) < n - 1 \Longleftrightarrow r(\mathrm{adj}(A)) = 0$,

(d) $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$,

(e) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} A$,

(f) $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B) \cdot \mathrm{adj}(A)$.