GAL I (JSIM), 11 stycznia 2022r.

Wyznacznik cz 2. Wzór Cauchy'ego i macierze blokowe

Zadanie 1. *Macierz $A \in M_5(K)$ ma wyznacznik równy 2, przy czym charakterystyka ciała K jest różna od 2 i 3. Oblicz wyznaczniki macierzy:*

$$2A, \quad -3A, \quad A^2, \quad -A^3, \quad (A^T)^2.$$

Zadanie 2. *Niech $A, B \in M_n(K)$ będą macierzami odwracalnymi, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Pokaż, że jeśli $\mathrm{char} K \neq 2$, to $AB + BA \neq 0$.*

Zadanie 3. *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pokaz, że jeśli $AB = BA$, to* $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$,

Zadanie 4. *Niech n będzie nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią oraz nich $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ spełniają warunek $A^2 + B^2 = 0$. Pokaż, ze macierz $AB - BA$ nie jest odwracalna.*

Zadanie 5. *Niech $A \in M_m(K), C \in M_n(K)$ oraz $B \in M_{m\times n}(K), D, E \in M_{n\times m}(K)$. Pokaż, że:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ D & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|,$$

Obliczyć:

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ C & E \end{vmatrix}.$$

Niech A, B, C, D będą macierzami rozmiarów odpowiednio $m\times p$, $m\times q$, $n\times p$, $n\times q$, przy czym $m+n = p+q$. Pokaż, że:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn+pq} \begin{vmatrix} D & C \\ B & A \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6. *Niech $A, B, C, D \in M_n(K)$. Pokaż, że*

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = 0.$$

Co więcej, jeśli A jest odwracalna, to $D = CA^{-1}B$.

Zadanie 7. *Niech $A, B, C, D \in M_n(K)$.*

- *Pokaż, że jeśli A jest odwracalna, to:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

- *Pokaż, że jeśli $AC = CA$ to:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

  Czy można zamienić kolejność B oraz C po prawej stronie powyższego wzoru? Czy zostaje on prawdziwy po opuszczeniu założenia $AC = CA$? Jeśli nie, podaj kontrprzykład.

Zadanie 8. *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pokaż, że*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Zadanie 9. *Niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 oraz $A, B \in M_n(K)$. Pokaż, że:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|.$$

Niech $C = A + B, D = A - B$. Pokaż, że jeśli C, D są odwracalne to:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} C^{-1} + D^{-1} & C^{-1} - D^{-1} \\ C^{-1} - D^{-1} & C^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. *Wyznacz iloczyn następujących macierzy i wyciągnij wnioski:*

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n - x_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$