GAL I (JSIM), 11 stycznia 2022r.
Wyznacznik cz 1. Rozwinięcie Laplace'a

Zadanie 1. *Policzyć wyznaczniki:*

$$(a)\begin{vmatrix} 36 & 60 & 72 & 37 \\ 43 & 71 & 78 & 34 \\ 44 & 69 & 73 & 32 \\ 30 & 50 & 65 & 38 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 & 14 \\ 10 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 8 \\ 12 & 12 & 8 & 11 \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 2. *Dany jest ciąg macierzy $A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ postaci:*

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & i & \dots & \dots & 0 \\ i & 1 & i & \dots & \dots \\ \dots & i & 1 & i & \dots \\ \dots & \dots & i & 1 & i \\ 0 & \dots & \dots & i & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie w miejscu wszystkich $\dots$ stoją zera. Wyznacz $\det A_n$.

Zadanie 3. *Policzyć wyznaczniki:*

$$(a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix}, \qquad (d)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Zadanie 4. *Pokazać, że jeśli $a \neq b$, to:*

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n\times n} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

Co w przypadku, gdy $a = b$?

Zadanie 5. *Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ spełnia $a_{ij} = 1$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11}, \dots, a_{nn} \geqslant 2$. Udowodnij, że* $\det A \geqslant n+1$.

Zadanie 6. *Niech $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x)\dots(p_n - x)$ i niech*

$$\delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & \dots & a & a \\ b & p_2 & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & \dots & b & p_n \end{vmatrix}.$$

(a) *Pokazać, że jeśli $a \neq b$, to $\delta_n = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$.*

(b) *Pokazać, że jeśli $a = b$, to $\delta_n = a\sum_{i=1}^{n} f_i(a) + p_n f_n(a)$, gdzie $f_i(a)$ oznacza $f(a)$ z brakującym czynnikiem $p_i - a$.*

(c) *Użyć poprzedniego punktu do obliczenia δ_n w przypadku, gdy $p_i = a$, dla ustalonego a.*

Zadanie 7. *Dana jest macierz A rozmiarów $n \times n$, której wszystkie wyrazy równe są ± 1. Pokazać, że $\det(A)$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 2^{n-1}.*

Zadanie 8. *Uzasadnić, że wyrazy $F_0, F_1, \ldots$ ciągu Fibonacciego spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}$ równość $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.*

Zadanie 9. *Czy wyznacznik poniższej macierzy nad $\mathbb{Q}$ może być równy 0?*

$$\begin{vmatrix} 102495 & 550429 & 873298 & 660697 \\ 370628 & 909093 & 127450 & 925601 \\ 835044 & 601178 & 624655 & 263392 \\ 663780 & 487252 & 292276 & 593107 \end{vmatrix}$$

Zadanie 10. *Dla pewnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wiadomo, że $\det(A+X) = \det(B+X)$, dla każdej macierzy $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pokazać, że $A = B$.*