GAL I (JSIM), 21 grudnia 2021 r.

Zadanie 1. *Znajdź bazę* $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ *przestrzeni* $(\mathbb{R}^3)^*$ *sprzężoną do bazy* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *gdzie*

$$\alpha_1 = (1,2,2), \quad \alpha_2 = (2,5,5), \quad \alpha_3 = (1,3,4).$$

Zadanie 2. *Niech* $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ *będzie funkcjonałem na* $\mathbb{R}^3$. *Znajdź współrzędne* f *w bazie sprzężonej do bazy standardowej* $\mathbb{R}^3$ *oraz w bazie sprzężonej do bazy* $\{(2,0,0),(1,2,0),(0,1,2)\}$.

Zadanie 3. *Sprawdź, że funkcjonały*

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 - 2x_2, \quad f_2(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - x_3, \quad f_3(x_1,x_2,x_3) = -x_1 + x_2 + x_3$$

tworzą bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$ *i znajdź taką bazę* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *by dla* $i = 1,2,3$ *mieć* $\alpha_i^* = f_i$.

Zadanie 4. *W przestrzeni liniowej* V *rozważamy bazę* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ *zaś w przestrzeni sprzężonej* V^* *dualny do niej układ funkcjonałów* $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots\}$. *Udowodnij, że jeśli* $\dim(V) = \infty$, *to układ* $\mathcal{A}^*$ *jest liniowo niezależny, ale nie rozpina* V^*.

Zadanie 5. *Niech* $\dim(V) = n$ *oraz niech* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in V^*$. *Wykaż, że niezerowe funkcjonały* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \cap \ldots \cap \ker(f_n) = \{0\}.$$

Jak interpretować ten fakt w języku układów równań i ich rozwiązań?

Zadanie 6. *Niech* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *będzie dane wzorem:*

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

Znajdź obraz i jądro przekształcenia sprzężonego $\phi^* : (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$.

Zadanie 7. *Dane są dwie bazy* $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,2),(2,1,1)\}$ *oraz* $\mathcal{B} = \{(2,1,1),(2,1,2),(2,2,2)\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *a także przekształcenie liniowe* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *takie, że*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i funkcjonał $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ *mający w bazie* $\mathcal{A}^*$ *współrzędne* $-1, 2, 1$. *Znajdź wzór na funkcjonał* f. *Znaleźć wzór na funkcjonał* $\phi^*(f)$.

Zadanie 8. *Udowodnij, że dla każdego* $\phi \in L(V,W)$ *mamy* $\ker(\phi^*) = \{f \in W^* \mid \mathrm{im}(\phi) \subseteq \ker(f)\}$.

Zadanie 9. *Niech* V *będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem* K. *Dla każdego niepustego podzbioru* $X \subseteq V$ *określamy*

$$Ann(X) = \{f \in V^* \mid \forall_{\alpha \in X} f(\alpha) = 0\}.$$

Wykaż, że $Ann(X)$ *jest podprzestrzenią* V^*, *że* $Ann(X) = Ann(\mathrm{lin}(X))$. *Pokaż, że dla podprzestrzeni* $A \subseteq V$ *mamy*

$$\dim(A) + \dim(Ann(A)) = \dim(V).$$

Zadanie 10. *Niech* $\pi : V \to V$ *będzie rzutem oraz* $\pi^* : V^* \to V^*$. *Pokaż, że* π^* *również jest rzutem oraz opisz jądro i obraz tego przekształcenia.*

Zadanie 11. *Niech* $n > 0$. *Badamy funkcjonały liniowe na przestrzeni macierzy* $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. *Opisz wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość* $\phi(AB) = \phi(BA)$, *dla dowolnych macierzy* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.