GAL I (JSIM), 17 grudnia 2021 r.

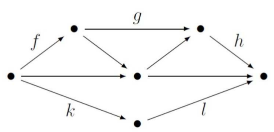
Diagramem przekształceń liniowych nazywać będziemy graf skierowany, którego wierzchołki etykietowane są przestrzeniami liniowymi (lub nie – jeśli mowa o dowolnych przestrzeniach), a krawędzie – przekształceniami liniowymi pomiędzy nimi. Podstawowym diagramem jest **ciąg**, czyli diagram postaci:

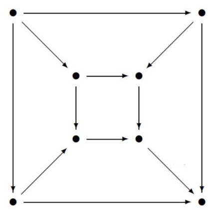
$$V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \quad (\star)$$

Złożenie $\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_1$ nazwiemy `złożeniem` wzdłuż ciągu $(\star)$. Powiemy, że dowolny diagram przekształceń jest `przemienny`, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków V, W tego diagramu, złożenia wzdłuż dowolnych dwóch ciągów tego diagramu o początkach w V i końcach w W są sobie równe (jako przekształcenia). Dla przykładu poniższy diagram jest przemienny, o ile $\phi_2 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \psi_1$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & B \arrow[d, "\phi_2"] \\ C \arrow[r, "\psi_2"] & D \end{tikzcd}$$

Diagramy, zwłaszcza ciągi przekształceń, trójkąty i kwadraty – ale i kilka innych – to ważne narzędzia w definiowaniu nowych przekształceń (i nie tylko) przy pomocy starych. Przekonamy się o tym wkrótce.





Banalne zad. 1. (po lewej) Cztery wewnętrzne *trójkąty* są przemienne. Pokaż, że również zewnętrze jest przemienne, czyli $h \circ g \circ f = l \circ k$.

Banalne zad. 2. Cztery wewnętrzne *trapezy* są przemienne. Pokaż, że jeśli wewnętrzny kwadrat jest przemienny, to zewnętrzny też. A odwrotnie?

Zadanie 1. *Pokaż, że przekształcenie liniowe $f : A \to B$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych przekształceń liniowych $g, h : B \to C$ z faktu, że $g \circ f = h \circ f$ wynika, że $g = h$. Wywnioskuj stąd, że jeśli f jest epimorfizmem to istnieje przekształcenie liniowe $h : B \to A$ takie, że $f \circ h = id_B$. Czy h jest wyznaczone jednoznacznie? Czy zachodzi implikacja odwrotna?*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

Zadanie 2. *Powiemy, że przekształcenie liniowe $f : A \to B$ jest silnym epimorfizmem jeśli dla każdego monomorfizmu $z : X \to Y$ oraz przekształceń liniowych $u : A \to X$ oraz $v : B \to Y$ takich, że $z \circ u = v \circ f$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $w : B \to X$ takie, że $z \circ w = v$ oraz $w \circ f = u$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dotted, "w"] \\ X \arrow[r, "z"'] & Y \end{tikzcd}$$

Pokaż, że silny epimorfizm jest epimorfizmem.

Zadanie 3. *Pokaż, że jeśli W' jest przestrzenią liniową nad K oraz $\psi \in L(V, W')$ spełnia $W \subseteq \ker(\psi)$, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\phi : V/W \to W'$ takie, że $\psi = \phi \circ \pi$ (narysuj diagram!)*

Zadanie 4. *Dane są podprzestrzenie U, V przestrzeni liniowej W i wiemy, że $V = (U \cap V) \oplus V'$. Pokaż, że $V' \simeq V/(U \cap V)$.*

Zadanie 5. *Dane są trzy przestrzenie liniowe $U \subseteq W \subseteq V$, przy czym U jest podprzestrzenią W oraz W jest podprzestrzenią V. Pokaż, że mamy izomorfizm przestrzeni V/W oraz $(V/U)/(W/U)$.*

* * *

Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

jest *krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni liniowych* nad ciałem K; co oznacza, że f jest monomorfizmem, $\operatorname{im} f = \ker g$ oraz g jest epimorfizmem. Ciąg

$$V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \quad (\star)$$

nazwiemy dokładnym, jeśli dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n-2$ mamy $\operatorname{im} \phi_i = \ker \phi_{i+1}$.

Zadanie 6. *Załóżmy, że* $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$ *jest* krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni liniowych *nad ciałem* K.

- *Dowiedź, że* $\dim V = \dim U + \dim W$.
- *Pokaż, że* $V \simeq U \oplus W$ *oraz* $W \simeq V/U$.

Zadanie 7. *Dany jest ciąg dokładny* $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$ *przekształceń liniowych. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by* C *było przestrzenią zerową.*

Zadanie 8 (lemat piątkowy)**.** *Załóżmy, że w diagramie przemiennym odwzorowań liniowych*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & U_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & U_5 \arrow[d, "f_5"] \\
V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & V_3 \arrow[r] & V_4 \arrow[r] & V_5
\end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi. Wykaż, że:

1. *gdy* f_2 *oraz* f_4 *są monomorfizmami, natomiast* f_1 *jest epimorfizmem, to* f_3 *jest monomorfizmem.*
2. *gdy* f_2 *oraz* f_4 *są epimorfizmami, natomiast* f_5 *jest monomorfizmem, to* f_3 *jest epimorfizmem.*
3. *gdy* f_2 *oraz* f_4 *są izomorfizmami,* f_1 *jest epimorfizmem, zaś* f_5 *jest monomorfizmem (w szczególności gdy wszystkie odwzorowania* f_1, f_2, f_4, f_5 *są izomorfizmami), to* f_3 *jest izomorfizmem.*

Zadanie 9 (lemat dziewiątkowy)**.** *Załóżmy, że w diagramie przemiennym odwzorowań liniowych*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U_1 \arrow[r] \arrow[d] & U_2 \arrow[r] \arrow[d] & U_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & W_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kolumny są krótkimi ciągami dokładnymi. Dowiedź, że:

1. *gdy pierwszy i drugi wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi, to trzeci wiersz także.*
2. *gdy drugi i trzeci wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi, to pierwszy wiersz także.*
3. *gdy pierwszy i trzeci wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi oraz* $g \circ f = 0$*, to drugi wiersz jest również krótkim ciągiem dokładnym.*