GAL I (JSIM), 5 październik 2021 r.

Zadanie 1. *Rozwiązać (w $\mathbb{R}$) układ równań zadany przy pomocy macierzy rozszerzonej:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

Zadanie 2. *Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ równań zadany macierzą rozszerzoną*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & t \\ 5 & s & 11 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

ma: dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste/nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych/jest sprzeczny? Jeśli układ jest niesprzeczny dla pewnych (s,t), podać ogólne rozwiązanie.

Zadanie 3. *Rozwiązać (w $\mathbb{R}$) układ równań:*

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0, \; \ldots \; , x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0, \quad x_{n-1} + x_n = 0.$$

Zadanie 4. *Niech $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ będą zbiorami rozwiązań jednorodnych układów równań odpowiednio postaci: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ (to jest pierwszy układ) oraz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (to jest drugi układ). Pokazać, że każdy wektor w $\mathbb{R}^n$ można przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci sumy wektorów $\vec{x} + \vec{y}$, gdzie $\vec{x} \in W_1$ oraz $\vec{y} \in W_2$.*

Zadanie 5. *Wyrazy kwadratowej macierzy współczynników $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ pewnego jednorodnego układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{0}$ spełniają warunek $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Zadanie 6. *Niech $\vec{\mu_1}, \vec{\mu_2}, \ldots, \vec{\mu_n} \in \mathbb{R}^n$ będą rozwiązaniami układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{b}$, gdzie A jest macierzą o współczynnikach rzeczywistych, zaś $\vec{b}$ pewnym niezerowym wektorem z $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że wektor $\lambda_1\vec{\mu_1} + \lambda_2\vec{\mu_2} + \ldots + \lambda_n\vec{\mu_n}$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{x} = \vec{b}$, dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.*

Zadanie 7. *Rozważmy trzy proste na płaszczyźnie zadane równaniami*

$$\begin{aligned} l_1: &\quad ax + by + c = 0 \\ l_2: &\quad bx + cy + a = 0 \\ l_3: &\quad cx + ay + b = 0 \end{aligned}$$

Pokazać, że proste l_1, l_2, l_3 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c = 0$.

Zadanie 8. *Wykazać, że jeśli okrąg na płaszczyźnie przechodzi przez 3 punkty o współrzędnych wymiernych, to współrzędne jego środka oraz kwadrat promienia są liczbami wymiernymi.*