GAL I (JSIM), 3-7 grudnia 2021 r.

Zadanie 1. *Znaleźć wzory na przekształcenie liniowe* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *zadane następującymi warunkami:*

(a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \phi((3,1)) = (4,5,-1), \phi((7,2)) = (-3,0,5)$,

(b) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \phi((1,2,1)) = (7,2), \phi((3,2,4)) = (20,17), \phi((5,1,2)) = (17,12)$,

(c) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi((1,0,1)) = (5,1,3), \phi((0,1,1)) = (2,3,4), \phi((1,0,0)) = (6,7,7)$.

Zadanie 2. *Dla jakich wartości parametru* $r \in \mathbb{R}$ *przekształcenie*

(a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ *zadane wzorem*

$$\phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + rx_3, 5x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3)$$

jest monomorfizmem?

(b) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *zadane wzorem*

$$\phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (4x_1 + x_2 + rx_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4)$$

jest epimorfizmem?

(c) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *zadane wzorem:*

$$\phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (5x_1 - x_2 + rx_3 + 5x_4, 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + rx_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4, x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4)$$

jest izomorfizmem?

Zadanie 3. *W każdym z poniższych przypadków zbadać, czy istnieje przekształcenie liniowe* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *spełniające zadane warunki. Jeśli tak to znaleźć przykład takiego* f *podając jego wzór.*

(a) $\ker(\phi) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0\}, \operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}((2,3,1))$,

(b) $\ker(\phi) = \operatorname{lin}((1,0,3,3)), \operatorname{im}(\phi) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$,

(c) $\ker(\phi) = \operatorname{lin}((1,1,1,1),(1,1,1,0)), \operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}((1,1,1),(1,1,0))$.

Zadanie 4. *Niech* $\phi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ *będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem:*

$$\phi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a-b)x^3 + (c-d)x.$$

Wyznaczyć bazy $\ker(\phi)$ *oraz* $\operatorname{im}(\phi)$.

* * *

Przez $L(V,W)$ oznaczamy przestrzeń liniową przekształceń liniowych z V do W.

Rozważamy przekształcenie liniowe: $\phi : K^n \to K^n$ zadane dla macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ wzorem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pamiętajmy też, że jeśli

$$\phi^n = \underbrace{\phi \circ \ldots \circ \phi}_{n},$$

to przekształcenie $a_n\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \ldots + a_1\phi + a_0 \operatorname{id} \in L(V,V)$ zadane jest wzorem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} (a_nA^n + \ldots + a_1A + a_0I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. *Niech* $A \in M_{n\times n}(K)$*. Pokaż, że* A *spełnia równanie* $A^2 = A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$K^n = \ker(A) \oplus \ker(A - I).$$

Ogólniej: $\phi \in L(V, V)$ *jest rzutem* $\Leftrightarrow \phi^2 = \phi \circ \phi = \phi$.

Zadanie 6. *Niech* $A \in M_{n\times n}(K)$*, gdzie* $char(K) \neq 2$*. Pokaż, że* $A^2 = I$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$K^n = \ker(A - I) \oplus \ker(A + I).$$

Ogólniej: $\phi \in L(V, V)$ *jest symetrią wtedy i tylko wtedy, gdy* $char(K) \neq 2$ *oraz* $\phi^2 = \phi \circ \phi = \phi$.

Zadanie 7. *Niech* $A \in M_{n\times n}(K)$*. Pokaż, że* A *spełnia równanie* $A^3 = A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$K^n = \ker(A) \oplus \ker(A - I) \oplus \ker(A + I).$$

Zadanie 8. *Pokaż, że jeśli* V *jest przestrzenią liniową oraz* $f \in L(V, V)$*, to:*

1. $\ker f = \ker f^2 \iff \ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.
2. $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 \iff \ker f + \operatorname{im} f = V$.

Zadanie 9. *Załóżmy, że* V *jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz* $f \in L(V, V)$*. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:*

1. $\ker f = \ker f^2$.
2. $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$.
3. $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.
4. $\ker f + \operatorname{im} f = V$.

Czy warunki (1)–(4) pozostaną równoważne bez założenia $\dim V < \infty$*?*

Zadanie 10. *Niech* V *będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem* K *oraz* $f \in L(V, V)$*. Powiemy, że* f *jest pierwiastkiem wielomianu* $w \in K[t]$*, jeśli przekształcenie* $w(f)$ *jest zerowe. Wielomian unormowany (o najwyższym współczynniku* 1*) najniższego stopnia o tej własności nazywamy wielomianem minimalnym* f*. Pokazać, że wielomian taki zawsze istnieje.*

Zadanie 11. *Niech* $\phi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^t)$*,* $\psi \in L(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^n)$*. Wykaż, że:*

- *Jeżeli* $\phi \circ \psi$ *jest identycznością, to* $\psi \circ \phi$ *jest rzutem,*
- *Jeżeli* $\phi \circ \psi$ *jest rzutem, to* $(\psi \circ \phi)^2$ *jest rzutem,*
- *Podać przykład* $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *takich, że* $\phi \circ \psi$ *jest rzutem i* $\psi \circ \phi$ *nie jest rzutem.*

Zadanie 12. *Pokazać, że jeśli* $f \in L(V, V)$ *jest przemienny z dowolnym rzutem* $g \in L(V, V)$ *to* f *jest homotetią.*

Zadanie 13. *Niech* $f : K^n \to K^n$ *będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że jeśli* $\dim(\ker(f)) \geqslant n/2$ *to* f *jest złożeniem dwóch rzutów.*

Zadanie 14. *Niech* U, V, W *będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem* K*. Załóżmy, że* $f \in L(U, V)$ *oraz* $g \in L(V, W)$*. Wykaż, że:*

1. $\dim \ker(g \circ f) = \dim \ker f + \dim(\operatorname{im} f \cap \ker g)$.
2. $\dim \operatorname{im}(g \circ f) = \dim \operatorname{im} f - \dim(\operatorname{im} f \cap \ker g)$.

Wywnioskuj z punktów (1) oraz (2), że gdy $h \in L(V, V)$*, to:*

3. $\dim \ker h^{n+1} = \dim \ker h + \sum_{i=1}^{n} \dim(\operatorname{im} h^i \cap \ker h)$ *dla dowolnego* $n \geqslant 1$.
4. $\dim \operatorname{im} h^{n+1} = \dim \operatorname{im} h - \sum_{i=1}^{n} \dim(\operatorname{im} h^i \cap \ker h)$ *dla dowolnego* $n \geqslant 1$.

Zadanie 15. *Niech* $A \in M_{n\times n}(K)$*. Pokaż. że*

$$2r(A^n) \leqslant r(A^{n-1}) + r(A^{n+1})$$

dla dowolnego $n \geqslant 1$.