GAL I (JSIM), 26 listopada 2021 r.

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K i niech $\alpha \in V$. Zbiór

$$\alpha + W = \{\alpha + \gamma \,|\, \gamma \in W\}$$

nazywamy **warstwą podprzestrzeni** W w przestrzeni V. Zbiór warstw podprzestrzeni W w V oznaczamy jako V/W. Oznaczenia przyjęte w poniższych zadaniach odpowiadają tej konwencji.

Zadanie 1. *Niech $v, v' \in V$. Wówczas $v + W = v' + W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v - v' \in W$.*

Zadanie 2. *Dla warstw $v + W$ oraz $v' + W$ określamy sumę warstw $+$ oraz iloczyn $\cdot$ skalara z ciała K przez warstwę:*

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W, \quad a \cdot (v + W) = av + W.$$

Wykaż, że jeśli $v + W = v' + W$, to dla każdego $v'' \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ mamy:

$$(v + W) + (v'' + W) = (v' + W) + (v'' + W), \quad a \cdot (v + W) = a \cdot (v' + W).$$

Zadanie 3. *Wykaż, że V/W z działaniami $+$ oraz $\cdot$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K, z elementem zerowym $0 + W$.*

Zadanie 4. *Niech W będzie podprzestrzenią V. Wówczas:*

- *jeśli $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą W oraz $\mathcal{B} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ ma tę własność, że $\{y_1 + W, \ldots, y_m + W\}$ to baza V/W, wówczas $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ oraz $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest bazą V,*
- *jeśli $\mathcal{C}$ jest bazą V taką, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ jest bazą W, to układ $\{v + W, v \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}\}$ jest bazą V/W.*
- *Załóżmy, że V jest przestrzenią skończenie wymiarową. Wówczas V/W również jest skończenie wymiarowa oraz*

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Zadanie 5. *Niech U, W będą podprzestrzeniami V oraz $\dim V/U < \infty$ i $\dim V/W < \infty$. Wykaż. że*

$$\dim V/(U \cap W) < \infty.$$

Zadanie 6. *Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad cialem K. Pokaż, że gdy U jest taką podprzestrznią V, że V/U jest nieskończonego wymiaru, to istnieje taka rodzina $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podprzestrzeni V, że*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq U,$$

ale dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \not\subseteq U.$$