GAL I (JSIM), 23 listopada 2021 r.

Zadanie 1. *Niech V będzie 7-wymiarową przestrzenią liniową zawierajacą dwie 5-wymiarowe podprzestrzenie V_1, V_2 spełniające warunek $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$. Czy dla każdego wektora $\alpha \in V$ istnieją wektory $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$, że $\alpha = \beta + \gamma$?*

Zadanie 2. *Niech $V_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ i niech $V_2 = \mathrm{lin}((2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ mamy*

a) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, b) $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$, c) $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$?

Zadanie 3. *Niech $V = \mathrm{lin}((1, 1, -2, -5), (1, 2, -3, -8), (3, 4, -7, -18)) \subseteq \mathbb{R}^4$ i dla każdego $s \in \mathbb{R}$ niech $W_s \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 &= 0 \end{cases}$$

Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_s$?

Zadanie 4. *Niech $A = \mathrm{lin}(-2, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 3))$. Znajdź takie podprzestrzenie A i B przestrzeni $\mathbb{R}^4$, by $\mathbb{R}^4$ było sumą prostą A i V, a nie było sumą prostą podprzestrzeni B i V ani A i B.*

Zadanie 5. *Niech*

$$A = \mathrm{lin}((1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (2, 3, 4, 5)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Znajdź takie podprzestrzenie $B, C \subseteq \mathbb{R}^4$, że $\mathbb{R}^4 = A \oplus B = B \oplus C = C \oplus A$ lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.

Zadanie 6. *Rozważmy podprzestrzeń W macierzy rozmiarów 2×2 o współczynnikach rzeczywistych $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ złożoną z macierzy symetrycznych, których suma wyrazów na przekątnej równa jest zero. Niech W' będzie podprzestrzenią $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ złozona z macierzy, których pierwsza kolumna jest zerowa. Pokazać, że $W \oplus W' = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Zadanie 7. *Niech V_1, V_2 będą n wymiarowymi podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Założmy, że układ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą V_1 oraz układ $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ jest bazą V_2. Wykaż, że układ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n\}$ jest bazą $V_1 + V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wykaż, że istnieje podprzestrzeń W przestrzeni V taka, że $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$.*

* * *

Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Powiemy, że układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest liniowo niezależny modulo U, jeśli:

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in U \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Powiemy, że układ liniowo niezależny jest bazą V modulo U, jeśli jest maksymalnym liniowo niezależnym układem modulo U.

Zadanie 8. *Niech $U \subsetneq V$ i niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie układem liniowo niezależnym modulo U. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

- *układ $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą V modulo U,*
- *$U \oplus \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n) = V$.*

Zadanie 9. *Niech $V = \mathbb{R}^4$ oraz*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni V modulo U.

Zadanie 10. *Niech $V = \mathbb{R}^5$ oraz*

$$U = \mathrm{lin}((1, 2, 3, 2, 1), (5, 1, 7, 10, 1), (-1, 2, 1, -2, 1)).$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni V modulo U.

Zadanie 11. *Niech $X = \mathbb{R}[x]$ oraz*

$$U = \{f \in X : f(0) = f(1) = 0\}, \qquad V = \{f \in X : f(0) = f(1)\}.$$

Uzasadnij, że $U \subseteq V$ są podprzestrzeniami przestrzeni X i oblicz wymiary przestrzeni X modulo U, X modulo V oraz V modulo U.