GAL I (JSIM), 16-19 listopada 2021 r.

Zadanie 1. *Znaleźć wszystkie macierze* $A \in M_{2\times 2}(K)$*, że* $AX = XA$*, dla każdego* $X \in M_{2\times 2}(K)$*.*

Zadanie 2. *Niech* $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$*. Dla każdego* n *wyznacz* M^n*. Jakie tożsamości otrzymujemy dzięki równości (wynikającej z łączności operacji mnożenia macierzy)* $M^{m+n} = M^m M^n$*?*

Zadanie 3. *Niech* $A, B \in M_{n\times n}(K)$*. Pokaż, że jeśli* $AB = 0$*, to*

$$r(A) + r(B) \leqslant n.$$

Zadanie 4. *Niech* $A \in M_{r\times n}(K)$ *oraz* $B \in M_{n\times s}(K)$*. Udowodnić, że* $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$*.*

Uwaga. Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że wykonanie elementarnej operacji wierszowej na macierzy A zamienia ją w macierz WA, dla pewnej macierzy W, nie zmieniając rzędu. Analogicznie dla elementarnej operacji kolumnowej istnieje macierz K taka, że po wykonaniu tej operacji dostajemy macierz AK. Wywnioskowaliśmy stąd, że jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ oraz $r(A) = n$, to $r(AB) = r(B)$ oraz $r(BA) = r(B)$.

Zadanie 5. *Dane są macierze* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*. Pokazać, że*

$$r(A) + r(B) \leqslant r(AB) + n.$$

Wskazówka: wyznaczyć iloczyn

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

Czy teza zmienia się dla macierzy prostokątnych?

Zadanie 6. *Niech* $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *przy czym* $r(A) = r$ *oraz* $AB = AC$*. Jaki jest największy możliwy rząd macierzy* $B - C$*?*

Zadanie 7. *Niech* $A, B \in M_{n\times n}(K)$*. Pokaż, że* $A^2 = A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $r(A) + R(A - I) = n$*.*

Zadanie 8. *Macierz* $A \in M_{n\times n}(K)$ *spełnia równość* $A^2 = 0$*. Pokazać, że* $r(A) \leqslant n/2$*.*

Zadanie 9. *Niech* $A \in M_{n\times n}(K)$*. Pokazać, że rząd macierzy blokowej* $\begin{bmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{bmatrix}$ *rozmiarów* $2n \times 2n$ *równy jest* $r(A) + r(B)$*.*

Zadanie 10. *Załóżmy, że macierze* $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ *oraz* $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ *spełniają*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Wyznacz macierz* BA*. Dlaczego da się to zrobić?*
2. *Podaj przykład macierzy* $A_1, A_2 \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ *oraz* $B_1, B_2 \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ *spełniających* $A_1B_1 = A_2B_2$*, ale* $B_1A_1 \neq B_2A_2$*.*

Zadanie 11. *Wyznacz iloczyn następujących macierzy i wyciągnij wnioski:*

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$