GAL I (JSIM), 9 listopada 2021 r.

Zadanie 1. *Wyznacz rzędy macierzy rzeczywistych:*

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 3 \\ 2s & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & t+3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & t^2-2t & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -t & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. *Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ rząd poniższej macierzy rzeczywistej równy jest 3?*

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. *Dana jest macierz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$, gdzie $a_{ij} = i + j$. Wyznacz $r(A)$.*

Zadanie 4. *Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Pokaż, że*

$$r(A+B) \leqslant r(A) + r(B).$$

Zadanie 5. *Niech A, B będą macierzami o współczynnikach w ciele K mającymi tyle samo wierszy. Niech $C = [A|B]$ będzie macierzą otrzymaną przez dopisanie B z prawej strony do A. Wykaż, że:*

$$r(C) \leqslant r(A) + r(B).$$

Zadanie 6. *Pokaż, że dla każdej macierzy $A \in M_{n\times m}(K)$ rzędu k istnieją macierze $A_1, \ldots, A_k$ takie, że $r(A_i) = 1$, dla $1 \leqslant i \leqslant k$, oraz*

$$A = A_1 + \ldots A_k.$$

Zadanie 7. *Niech G będzie grafem niezorientowanym o n wierzchołkach i m krawędziach, nieposiadającym pętli (czyli takiej krawędzi, która jest incydentna tylko z jednym wierzchołkiem tego grafu). Macierz $A(G) = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{Z}_2)$ określoną warunkami:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j\text{-ta krawędź jest incydentna z } i\text{-tym wierzchołkiem} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

*nazywamy **macierzą incydencji grafu** G. Pokaż, że jeśli G jest grafem spójnym, to $r(A(G)) = n - 1$. Uogólnij ten wynik na grafy o k spójnych składowych.*

Zadanie 8. *Niech $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Rozważamy macierz M rozmiarów $n! \times n$, której wiersze powstają przez permutowanie v na wszystkie możliwe sposoby. Wyznacz możliwe wartości $r(A)$.*

Zadanie 9. *Niech n będzie ustaloną całkowitą liczbą dodatnią. Wyznacz najmniejszy możliwy rząd macierzy rzeczywistej $n \times n$ mającej zera na przekątnej oraz liczby dodatnie poza przekątną.*

Zadanie 10. *(*) Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ będzie macierzą o tej własności, że co najmniej $m + n$ parami różnych liczb pierwszych to wartości bezwzględne pewnych wyrazów A. Pokaż, że $r(A) \geqslant 2$.*