GAL I (JSIM), 2-5 listopada 2021 r.

Zadanie 1. *Niech* $\alpha_1 = (-1,1,1), \alpha_2 = (1,1,2), \alpha_3(t) = (-3,t,0)$. *Dla jakich* $t \in \mathbb{R}$ *układ* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(t)$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*? Dla każdego takiego* t *znaleźć współrzędne wektora* $\beta = (1,1,-1)$ *w tej bazie.*

Zadanie 2. *Uzasadnij, że w przestrzeni* $\mathbb{R}^2$ *istnieje nieskończony zbiór wektorów, którego dowolne dwa różne elementy są liniowo niezależne. Sformułuj oraz wykaż podobne twierdzenie dla przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*, gdzie* $n \geqslant 3$.

Zadanie 3. *Niech* $W \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie opisane przez równania* $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ *oraz* $x_3 - x_4 = 0$. *Dopełnić bazę podprzestrzeni opisanej przez ten układ równań do bazy* $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 4. *Niech* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *będą liniowo niezależnymi wektorami w przestrzeni lin. nad ciałem* K. *Który z poniższych układów wektorów jest liniowo niezależny?:*

- $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1\}$,
- $\{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1\}$,
- $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1\}$,
- $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1\}$.

Zadanie 5. *Znaleźć bazę podprzestrzeni* $W \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *opisanej w następujący sposób:*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \text{gdzie } a+b=c, b+c=d, c+d=a \right\}.$$

Zadanie 6. *Niech* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *będzie bazą przestrzeni liniowej* V*, przy czym* $n > 1$. *Pokazać, że układ*

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\}$$

również jest bazą V. *Czy układ*

$$\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1\}$$

również jest bazą? Czy fakt odwrotny ma miejsce?

Zadanie 7. *Niech* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ *będą niepustymi podzbiorami zbioru* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Pokazać, że istnieją niepuste i rozłączne podzbiory* I, J *zbioru* $\{1,2,\ldots,n+1\}$ *takie, że:*

$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{s\in J} A_s.$$

Zadanie 8. *Czy istnieją wielomiany* $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ *oraz* $c(y), d(y) \in \mathbb{R}[y]$ *takie, że dla każdych* $x, y \in \mathbb{R}$ *zachodzi równość*

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)?$$

Zadanie 9. *Dla każdego* $t \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ *wektor*

$$\alpha_t = (t, t^2, \ldots, t^n, \ldots)$$

należy do przestrzeni liniowej wszystkich ciągów ograniczonych o wyrazach rzeczywistych z naturalnymi działaniami (dodawanie i domnażanie przez skalar po współrzędnych) nad $\mathbb{R}$. *Pokazać, że układ* $\{\alpha_t \,|\, t \in (0,1)\}$ *jest liniowo niezależny.*

Zadanie 10. *Pokazać, że rodzina* $\{f_a \in \mathbb{R}(x) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ *o elementach postaci*

$$f_a = \frac{1}{x-a}$$

tworzy liniowo niezależny układ elementów nad $\mathbb{R}$. *Jak dopełnić ten układ do rozpinającego całe* $\mathbb{R}(x)$*?*