Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 9, 29.11.2021 r.

Przypomnienie

Niech $(V, +, \cdot, 0_V), (W, +, \cdot, 0_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy **przekształceniem liniowym**, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:

(1) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(2) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$.

W szczególności: $\phi(0_V) = 0_W$, czyli zero przechodzi w zero.

Uszczegółowienie: w zasadzie należy mówić o przekształceniach K-liniowych.

Np. przekształcenie $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dane wzorem:

$$\phi(z) = \overline{z}$$

jest $\mathbb{R}$-liniowe, ale nie jest $\mathbb{C}$-liniowe. bo dla $K = \mathbb{C}$ spełnia (1), ale nie spełnia (2).

Uwaga 1.

Niech $\phi : V \to W$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,

(ii) dla każdych $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ zachodzi

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Innymi słowy: spośród wszystkich funkcji $\phi : V \to W$ przekształcenia liniowe to dokładnie te, które **zachowują** kombinacje liniowe.

Uwaga. Przekształcenia struktur algebraicznych, które zachowują działania nazywamy **homomorfizmami** (np. grup, ciał, pierścieni, przestrzeni liniowych).

Uwaga 1.

Niech $\phi : V \to W$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,

(ii) dla każdych $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ zachodzi

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Dowód.

- Indukcja ze względu na k. Dla $k = 2$ mamy:

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = \phi(a_1\alpha_1) + \phi(a_2\alpha_2) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha).$$

- Niech $k > 2$. Z definicji przekształcenia liniowego mamy:

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = \phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{k-1}\alpha_{k-1}) + a_k\phi(\alpha_k).$$

  Korzystając z założenia indukcyjnego dostajemy implikację (i) $\Rightarrow$ (ii). Odwrotna implikacja jest oczywista.

Uwaga 1.

Niech $\phi : V \to W$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,

(ii) dla każdych $a_1, \dots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$ zachodzi

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Wniosek 1.

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Wówczas:

- jeśli A jest podprzestrzenią V, to $\phi(A)$ jest podprzestrzenią W,
- jeśli B jest podprzestrzenią W, to $\phi^{-1}(B)$ jest podprzestrzenią V.

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – **baza przestrzeni** V,
- $\beta_1, \ldots, \beta_n$ – dowolny układ wektorów przestrzeni W.

Wówczas istnieje **dokładnie jedno** takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Dowód:

- Pokażemy najpierw, że istnieje przekształcenie ϕ spełniające podane warunki.
- Dla każdego $\gamma \in V$ istnieją **jednoznacznie wyznaczone** $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n.$$

- Oznacza to, że poniższe przekształcenie ϕ jest **dobrze określone**:

$$\phi(\gamma) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n.$$

  i spełnia założenia twierdzenia. Dlaczego?

Dowód cd.

- Po pierwsze: ϕ jest liniowe. Dowolne dwa wektory $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ można rozłożyć w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tzn. istnieją $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in K$, że:

$$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n, \quad \gamma_2 = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n,$$

  zatem skoro $\gamma_1 + \gamma_2$ ma w tej bazie współrzędne $a_1 + a'_1, \ldots, a_n + a'_n$, mamy:

$$\begin{aligned} \phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2) &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \\ &= (a_1 + a'_1)\beta_1 + \ldots + (a_n + a'_n)\beta_n = \\ &= \phi(\gamma_1 + \gamma_2). \end{aligned}$$

- Po drugie: ϕ spełnia warunki twierdzenia. Wektor α_j ma w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tylko j-tą współrzędną niezerową, równą 1, a zatem z definicji ϕ:

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

- A zatem istnieje przekształcenie spełniające warunki twierdzenia. Dlaczego jest jednoznaczne?

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.

- Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \\
&= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n = \\
&= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\
&= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= \phi(\alpha).
\end{aligned}$$

- Czyli dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$. Zdefiniowane przez nas przekształcenie liniowe ϕ spełniające podane warunki jest **jedynym** przekształceniem liniowym z V do W spełniającym te warunki!

Komentarze

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,1,0)$. Układ $((1,0,0),(0,1,0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni.

  Istnieje więc więcej niż jedno przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Przykładowe to:
  - identyczność,
  - oraz symetria względem płaszczyzny $\mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(0,0,1)$.

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1), \alpha_3 = (1,1)$ oraz $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1,0,0)$. Teraz układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpina $\mathbb{R}^2$, ale jest liniowo zależny.

  Gdyby istniało takie przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, że

  $$\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_2) = \phi(\alpha_3) = (1,0,0),$$

  to z liniowości ϕ mielibyśmy sprzeczność:

  $$(0,0,0) = \phi((0,0)) = \phi(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_3) = (1,0,0).$$

Wniosek 2

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ zadane będzie na bazie standardowej warunkami:

$$f((1,0)) = (1,1,2,1), \quad f((0,1)) = (0,3,1,-2).$$

Wówczas z liniowości f mamy:

$$\begin{aligned} f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = x \cdot f((1,0)) + y \cdot f((0,1)) &= x(1,1,2,1) + y(0,3,1,-2) \\ &= (x, x+3y, 2x+y, x-2y). \end{aligned}$$

Patrząd kolumnowo f działa w nastepujący sposób:

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} x \\ x+3y \\ 2x+6 \\ x-2y \end{bmatrix}.$$

Wniosek 2

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Pokażemy, że dla każdego takiego przekształcenia ϕ istnieje jednoznacznie wyznaczona macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

taka, że przekształcenie ϕ, zobrazowane na wektorach kolumnowych, ma następującą postać:

$$K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in K^m$$

Wniosek 2

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Dowód. Biorąc macierz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ i przypisując i-temu wektorowi standardowemu ϵ_i w K^n i-tą kolumnę macierzy A, czyli

$$\phi(\epsilon_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} & \ldots & a_{mi} \end{bmatrix}^T$$

otrzymujemy wzór na ϕ postaci:

$$\begin{aligned} f((x_1, \ldots, x_n)) &= f(x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)) = \\ &= f((x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n)) = \\ &= x_1 f(\epsilon_1) + \ldots + x_n f(\epsilon_n) = \\ &= x_1(a_{11}, \ldots, a_{m1}) + \ldots + x_n(a_{1n}, \ldots, a_{mn}) = \\ &= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ \ldots\ ,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n). \end{aligned}$$

Dwa ważne wnioski odnośnie układów równań:

- Jeśli dany jest jednorodny układ m równań liniowych o zbiorze n niewiadomych nad ciałem K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

  to zbiorem rozwiązań tego układu jest zbiór takich wektorów $(x_1, \ldots, x_n)$ z K^n, które po wykonaniu przekształcenia $\phi : K^n \to K^m$ danego wzorem

$$K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\color{red}{n}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{{\color{blue}{m}}1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in K^m$$

  przechodzą w wektor zerowy.

Dwa ważne wnioski odnośnie układów równań:

- Niejednorodny układ m równań liniowych o zbiorze n niewiadomych nad ciałem K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$ **jest obrazem pewnego wektora** $(x_1, \ldots, x_n)$ przy przekształceniu ϕ danym wzorem:

$$K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in K^m$$

Definicja 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór
$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$
- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:
$$\operatorname{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Proste przykłady

- Jeśli $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane jest wzorem
$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2,$$
to $\ker(\phi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

Definicja 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór

$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$

- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Proste przykłady

- Jeśli $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\phi(x) = (x, x, x),$$

  to $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}((1, 1, 1))$.

Definicja 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór

$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$

- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Uwagi:

- Jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ są odpowiednio podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V oraz W.
- Jeśli $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha), \ldots, \phi(\alpha_n))$.

Kluczowy przykład

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas $\ker(f) \subseteq K^n$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

A przestrzeń $\mathrm{im}(f) \subseteq K^m$? Jest to:

$$\mathrm{lin}(f(\epsilon_1), \ldots, f(\epsilon_n)) = \mathrm{lin}((a_{1\color{red}{1}}, \ldots, a_{m\color{red}{1}}), \ldots, (a_{1\color{red}{n}}, \ldots, a_{m\color{red}{n}})).$$

W szczególności z tw. Kroneckera-Capellego:

$$n = \dim(K^n) = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f).$$

Inne przykłady

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:
$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0 \\ V, & a = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \begin{cases} V & , a \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0 \end{cases}.$$
- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:
$$\ker(\phi) = V_2, \quad \operatorname{im}(\phi) = V_1.$$
- Niech $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ jest pochodną, to:
$$\ker(\phi) = \{w \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(w) \leq 0\}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}[x].$$
- Niech $\phi : K^\infty \to K^\infty$ będzie dane wzorem:
$$(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) \to (0, 0, x_3, x_4, \ldots).$$
Wówczas $\ker(\phi) = \{(s, t, 0, 0, \ldots), \mid s, t \in K\}$.

Definicja 2.

Wymiar przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$ nazywamy **rzędem przekształcenia**, ozn. $r(\phi)$.

Uwaga 3.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech U będzie taką podprzestrzenią przestrzeni V, że $V = \ker(\phi) \oplus U$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni U. Wówczas układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:
$$\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$
- Niech $\beta \in \mathrm{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$.
- Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$ oraz $\alpha'' \in U$.
- A zatem $\alpha'' = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Zatem:
$$\begin{aligned}\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'') = \\ = \phi(\alpha') + \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = \\ = 0 + a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).\end{aligned}$$

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$
- Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$, bo $V = \ker(\phi) \oplus U$.
- W szczególności $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = 0$, bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- Układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest zatem liniowo niezależny.

Dowód twierdzenia (przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$). Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim\ker(\phi) + \dim(U) = \dim\ker(\phi) + k = \dim\ker(\phi) + \dim\mathrm{im}(\phi).$$

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru.

Dowód wymaga pewnej modyfikacji, ale w rezultacie okazuje się, że jeśli $\phi : V \to W$ jest liniowe i $\dim(V) = \infty$, to wymiary przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi)$ nie mogą być jednocześnie skończenie wymiarowe.

Ważne sytuacje:

- gdy $\dim\ker(\phi) = 0$,
- gdy $\dim\mathrm{im}(\phi) = \dim(V)$,
- gdy zachodzi jedno i drugie.

Definicja 3.

Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ nazywamy:

- **monomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe, to znaczy:

  $$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

  dla każdych $\alpha, \beta \in V$.

- **epimorfizmem**, gdy ϕ jest „na”, to znaczy gdy dla każdego $\gamma \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$.

- **izomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe i „na"
  (to znaczy, gdy ϕ jest bijekcją).

Izomorfizm przestrzeni to pojęcie pozwalające na ich „utożsamianie".

Przykłady

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem
$$\phi(x) = (x, x, x),$$
jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem.

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane wzorem:
$$\phi(x, y, z) = x$$
jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dane wzorem:
$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$
jest izomorfizmem.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ker}(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\mathrm{ker}(\phi) = \{0\}$.
- Na odwrót: jeśli $\mathrm{ker}(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha) - \phi(\beta) = \phi(\alpha - \beta) = 0$, czyli $\alpha - \beta \in \mathrm{ker}(\phi)$.
- Skoro $\mathrm{ker}(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$.
- W szczególności ϕ to monomorfizm.

Wniosek 3.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.
- A zatem $\dim(\ker(\phi)) = 0$.
- Skoro $\dim V = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi))$, to $\dim V = \dim(\mathrm{im}(\phi))$.
- Skoro $\mathrm{im}(\phi) \subseteq W$, to $\dim(\mathrm{im}(\phi)) \leq \dim W$.
- Zatem $\dim V \leq \dim W$.

Wniosek 3.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Wniosek 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\mathbf{dim}\, V = \mathbf{dim}\, W < \infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) ϕ jest monomorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem,

(c) ϕ jest izomorfizmem.

Definicja 4.

Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.

Twierdzenie 3.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

W konsekwencji, mamy izomorfizm $V \simeq K^{\dim V}$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.
- Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\mathrm{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$.
- Zatem ϕ przeprowadza bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.
- Pokazaliśmy $(a) \Rightarrow (b)$. Implikacja $(b) \Rightarrow (c)$ jest oczywista.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Teraz $(c) \Rightarrow (a)$. Przypuśćmy, że przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W.
- Jeśli $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in \ker(\phi)$, to $0 = \phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, więc $a_1 = \ldots = a_n = 0$. A zatem $\alpha = 0$. Wobec dowolności α mamy $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Weźmy $\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$. Wówczas $\beta = \phi(\alpha)$, dla pewnego $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. A zatem z dowolności wyboru β mamy $W = \mathrm{im}(\phi)$.

Dowód

Twierdzenie 3.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

W konsekwencji, mamy izomorfizm $V \simeq K^{\dim V}$.

- Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej.
- Implikacja $(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi : V \to W$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wiadomo, że takie przekształcenie istnieje dla każdego układu wektorów W równolicznego z bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Takie przekształcenie ϕ, które wybraliśmy, musi być jednak izomorfizmem, bo przeprowadza bazę V na bazę W.
- Ostatnie stwierdzenie wynika z tego, że $\dim(K^{\dim W}) = \dim W$.

Między przestrzeniami tego samego wymiaru (skończonego) jest wiele izomorfizmów. W szczególności, jeśli $\dim V = n$ wówczas dla każdej bazy $\mathcal{A}$ funkcja $\phi_{\mathcal{A}}$ postaci:

$$V \ni \alpha \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} (a_1, \ldots, a_n) \in K^n,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są (wyznaczonymi jednoznacznie!) współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, to $\phi_{\mathcal{A}}$ jest izomorfizmem.

* * *

Za tydzień: o przestrzeni przekształceń (i co to jest?) pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi, czyli:

- struktura przestrzeni liniowej przekształceń,
- o składaniu (i rozkładaniu) przekształceń (i po co to robić),
- macierzy przekształcenia i mnożeniu macierzy,
- o diagramach.