Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI

WYKŁAD 8, 23.11.2021 r.

Przypomnienie – twierdzenie Kroneckera-Capellego

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego U' odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

(c) Jeśli α jest rozwiązaniem układu U, a W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego U' odpowiadającego układowi U, to zbiór rozwiązań układu U jest postaci $\alpha + W = \{\alpha + \beta, \mid \beta \in W\}$.

Przypomnienie – wniosek

Niech V będzie podprzestrzenią w K^n. Wówczas:

- V jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i współczynnikach w ciele K,
- jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań,
- jeśli $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Definicja

Jeśli $V \subseteq K^n$ jest przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych U, to mówimy, że przestrzeń V jest **opisana układem** U.

Niech $\{V_t\}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V. Interesuje nas znalezienie dwóch podprzestrzeni.

- Minimalna (względem inkluzji) podprzestrzeń zawierającą wszystkie V_t,
- Maksymalna (wzgl. inkl.) przestrzeń zawierającą elementy ze wszystkich V_t.

Kluczowe przykłady.

- Jeśli $V_t = \mathrm{lin}((1,0,t)) \subseteq \mathbb{R}^3$, dla $t \in \mathbb{Q}$, to najmniejsza podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$ zawierająca wszystkie te podprzestrzenie to
$$\mathrm{lin}(\{(1,0,t), t \in \mathbb{Q}\}) = \mathrm{lin}((1,0,1),(1,0,2)).$$
- Jeśli $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ opisane są odpowiednio układami $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, to największa podprzestrzeń zawierająca elementy zarówno z W_1, jak i W_2 opisana jest układem równań:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}.$$

Definicja 1

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Przez $V_1 + V_2$ oznaczać będziemy zbiór

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 \,|\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\},$$

zwany **sumą podprzestrzeni** V_1 i V_2.

Przykłady:

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1,0) + \mathrm{lin}(1,1)$, bo dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mamy:

$$(x,y) = (x-y,0) + (y,y).$$

- Każdą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

a zbiory P funkcji parzystych i N funkcji nieparzystych są podprzestrzeniami

$$F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = N + R.$$

Definicja 2 - nawiązująca do funkcji parzystych i nieparzystych

Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$. Macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$ nazwiemy **macierzą transponononowaną** do macierzy A, ozn. A^T, jeśli

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Macierz kwadratową $M \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy:

- **symetryczną**, jeśli $M = M^T$,
- **antysymetryczną**, jeśli $M = -M^T$.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2 - nawiązująca do funkcji parzystych i nieparzystych

Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$. Macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ nazwiemy **macierzą transpononowaną** do macierzy A, ozn. A^T, jeśli

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Macierz kwadratową $M \in M_{n \times n}(K)$ nazywamy:

- **symetryczną**, jeśli $M = M^T$,
- **antysymetryczną**, jeśli $M = -M^T$.

Podzbiory macierzy symetrycznych i antysymetrycznych w $M_{n \times n}(K)$ są podprzestrzeniami i dla ciała charakterystyki $\neq 2$ ich suma to całe $M_{n \times n}(K)$. Dla każdego $M \in M_n(K)$ mamy bowiem:

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}.$$

Definicja 3

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas określamy zbiór

$$\sum_{t\in T} V_i = \{\alpha_{t_1} + \ldots + \alpha_{t_r} | \alpha_{t_i} \in V_{t_i}, t_1, \ldots, t_r \in T, r \in \mathbb{N}\},$$

zwany **sumą rodziny podprzestrzeni** $\{V_t\}_{t\in T}$. W przypadku $T = \{1, \ldots, n\}$ piszemy:

$$\sum_{i\in 1}^{n} V_i = V_1 + \ldots + V_n.$$

Przykłady:

- $K[x] = \sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\leq n}[x]$.
- $\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) + \mathrm{lin}((1, 0, 0), (1, 1, 0)) + \mathrm{lin}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$.

Uwaga

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas

$$\sum_{t\in T} V_i = \mathrm{lin}\left(\bigcup_{t\in T} V_t\right).$$

W szczególności, suma rodziny podprzestrzeni V jest podprzestrzenią V. Jest to najmniejsza podprzestrzeń w V zawierająca wszystkie $\{V_t\}_{t\in T}$.

Definicja 4

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas

$$\bigcap_{t\in T} V_t$$

nazywamy **iloczynem**, **przecięciem** lub **częścią wspólną** rodziny $\{V_t\}_{t\in T}$.

Formuła Grassmanna

Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód:

- Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$.
- Na mocy twierdzenia Steinitza istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V_1$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_l \in V_2$ takie, że

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) - \text{ baza } V_1$$
$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l) - \text{ baza } V_2.$$

- Pokażemy, że

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$$

jest bazą $V_1 + V_2$.

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$
- Stąd wynika, że
$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(\underbrace{b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l}_{\in V_1}).$$
- Zatem $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l \in V_1 \cap V_2$.
- A zatem dla pewnych $c'_1, \ldots, c'_m \in K$ mamy:
$$b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = c'_1\gamma_1 + \ldots + c'_m\gamma_m.$$
- Stąd $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l - c'_1\gamma_1 - \ldots - c'_m\gamma_m = 0$. Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l$ to baza V_2, zatem:
$$b_1 = b_2 = \ldots = b_l = c'_1 = \ldots = c'_m = 0$$

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$
mamy
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$
- Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – baza V_1, czyli:
$$c_1 = \ldots = c_m = a_1 = \ldots = a_k = 0.$$
- A zatem układ $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ – liniowo niezależny.
- $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ to baza V_1 oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l$ to baza V_2, czyli
$$V_1 + V_2 = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l).$$
- Zatem $\dim(V_1 + V_2) = m + k + l = (m + k) + (m + l) - m$.

Definicja 5

Jeśli dla pewnych podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$ to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni V_1, V_2, ozn. $V = V_1 \oplus V_2$

Przykłady:

- Dla każdego wektora $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jeden rozkład na sumę elementów z $\mathrm{lin}(1, 1)$ oraz $\mathrm{lin}(0, 1)$:
$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x).$$
- Każdy ciąg zbieżny o wyrazach rzeczywistych można w jednoznaczny sposób przedstawić jako sumę ciągu stałego i ciągu zbieżnego do 0.
- Każdą funkcję $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, więc $V = V_1 + V_2$.
- Gdyby $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, to istniałby niezerowy wektor $\alpha \in V_1 \cap V_2$.
- Wtedy jednak mamy dwa rozkłady: $\alpha = \alpha + 0 = 0 + \alpha$ elementu α na sumę elementów z V_1 oraz V_2, sprzeczność.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Wykażemy, że każdy wektor $\alpha \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako suma wektora z V_1 i wektora z V_2.
- Skoro $V = V_1 + V_2$, to istnieją $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$ spełniające $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
- Przypuśćmy, że $\alpha = \alpha_1' + \alpha_2'$, dla pewnych $\alpha_1' \in V_1$, $\alpha_2' \in V_2$.
- Wtedy, $\alpha_1 - \alpha_1' = \alpha_2' - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Zatem $\alpha_1 = \alpha_1'$ oraz $\alpha_2 = \alpha_2'$.

Wnioski i uwaga

1. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:
   - $V = V_1 \oplus V_2$,
   - $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.
2. Dla każdej podprzestrzeni przestrzeni skończenie wymiarowej V istnieje taka podprzestrzeń $U \subset V$, że $V = W \oplus U$.
3. Z równości $V = X \oplus Y = X \oplus Z$ nie wynika, że $Y = Z$, ale jeśli $\dim(V) < \infty$, to $\dim(Y) = \dim(Z)$.
4. Uwaga: nie ma łatwego wzoru na $\dim(V_1 + V_2 + V_3)$. Nie jest to na przykład:

   $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$,

   wystarczy sprawdzić dla podprzestrzeni w $\mathbb{R}^2$. Jaki jest ogólny powód?

Definicja 6

Mówimy, że przestrzeń V jest **sumą prostą rodziny podprzestrzeni** $\{V_t\}_{t\in T}$ jeśli każdy wektor $\alpha \in V$ daje się przedstawić jednoznacznie jako suma

$$\alpha_{t_1} + \ldots + \alpha_{t_r},$$

gdzie $\alpha_{t_i} \in V_{t_i}$, dla pewnych parami różnych $t_i \in T$. Wówczas piszemy:

$$V = \bigoplus_{t\in T} V_t,$$

a w przypadku, gdy $T = \{1, \ldots, n\}$ po prostu $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

Przykład:

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{lin}(1,0,0,0) \oplus \mathrm{lin}(0,1,0,0) \oplus \mathrm{lin}((1,1,1,0),(0,0,0,1)).$$

Uwaga (ćwiczenie)

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $V = \bigoplus_{t\in T} V_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \sum_{t\in T} V_t$ oraz dla każdych $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$ zachodzi:

$$V_{t_0} \cap \sum_{i=1}^{k} V_{t_i} = \{0\}.$$

W szczególności aby mieć sumę prostą $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ nie wystarczy, aby mieć

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{oraz} \quad V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}.$$

Dla przykładu weźmy podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$ postaci:

$$V_1 = \mathrm{lin}(1,0), \quad V_2 = \mathrm{lin}(1,1), \quad V_3 = \mathrm{lin}(0,1).$$

To złe „uogólnienie". Drugi warunek trzeba zastąpić układem warunków:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}, \quad V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{0\}, \quad V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}.$$

Uwaga (ćwiczenie)

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $V = \bigoplus_{t\in T} V_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \sum_{t\in T} V_t$ oraz dla każdych $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$ zachodzi:

$$V_{t_0} \cap \sum_{i=1}^{k} V_{t_i} = \{0\}.$$

Wniosek

jeśli V jest skończenie wymiarowa i jest sumą prostą $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i.$$

W tym miejscu kończy się materiał
wymagany na pierwszym kolokwium.

Definicja 7.

Niech $(V, +, \cdot, 0_V), (W, +, \cdot, 0_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy **przekształceniem liniowym**, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:

(i) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(ii) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$.

W szczególności: $\phi(0_V) = 0_W$, czyli zero przechodzi w zero.

- Przekształcenie $\phi : V \to W$ nazwiemy **zerowym**, jeśli mamy
$$\phi(\alpha) = 0, \text{ dla każdego } \alpha \in V.$$
- Przekształcenie $\phi : V \to V$ nazwiemy **identycznością**, ozn. id_V, jeśli mamy
$$\phi(\alpha) = \alpha, \text{ dla każdego } \alpha \in V.$$

Przykłady:

- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ postaci
$$\phi((a,b)) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, a\right).$$

- Przekształcenie $\phi : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ przyporządkowujące funkcji f funkcję $\phi(f)$ daną wzorem
$$(\phi(f))(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

- Odwzorowanie $d : K[x] \to K[x]$ zadane wzorem
$$d(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

- Odwzorowanie $tr : M_{n\times n}(K) \to K$ przypisujące macierzy $A = [a_{ij}]$ sumę elementów na przekątnej $a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Jeszcze kilka typów przekształceń:

- Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie dane wzorem $f(\alpha) = a\alpha$ nazywamy **homotetią** (albo jednokładnością) o skali a.
- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:
$$\phi((x_1, x_2)) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$
nazywamy **obrotem** o kąt θ.
- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to dla każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Definiujemy:
  - **rzut** $\phi : V \to V$ przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2 dany wzorem
  $$\phi(\alpha) = \alpha_1.$$
  - **symetrię** $\psi : V \to V$ przestrzeni V względem V_1 wzdłuż V_2 daną wzorem
  $$\psi(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Intuicja związana z przekształceniami liniowymi i operacjami na podprzestrzeniach – rozkłady wyznaczane są przez przekształcenia.

Rozważmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1, 2x_2, 4x_3).$$

Z geometrycznego punktu widzenia przekształcenie to nie jest ani obrotem, ani symetrią czy rzutem, ale biorąc rozkład:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{lin}(0,0,1)$$

widzimy, że ϕ ograniczone do każdego ze składników jest na nim homotetią, bo:

- dla każdego $v \in \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0))$ mamy $\phi(v) = 2v$,
- dla każdego $w \in \mathrm{lin}((0,0,1))$ mamy $\phi(w) = 4w$.

Inna ważna sprawa: jeśli *wiemy* co robi ϕ na każdym ze składników prostych, to *wiemy* co robi na całej przestrzeni liniowej! To nie przypadek, ale zwiastun wielkiej i ważne teorii, którą zajmiemy się w kolejnym semestrze.