polish

Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 7, 16.11.2021 r.

Przypomnienie

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Nasze cele na dziś:

- opisać problem rozwiązywalności układów równań za pomocą rzędu,
- opisać wszystkie podprzestrzenie w K^n w języku układów równań.

Dwa znane nam opisy podprzestrzeni w K^n:

- jako przestrzenie rozpięte na skończonym układzie wektorów,
- jako zbiory rozwiązań jednorodnych układów równań liniowych.

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego U' odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

(c) Jeśli α jest rozwiązaniem układu U, a W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego U' odpowiadającego układowi U, to zbiór rozwiązań układu U jest postaci $\alpha + W = \{\alpha + \beta, \mid \beta \in W\}$.

Kluczowy przykład. Niech $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, gdzie $a_1 \neq 0$. Wówczas zbiór rozwiązań równania

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

jest podprzestrzenią wymiaru $n - 1$ postaci:

$$\mathrm{lin}((-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \ldots, 1)).$$

Rozwiązanie ogólne $x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} x_n$.

Zatem $x_2, \ldots, x_n$ – parametry, czyli wszystkie rozwiązania są postaci:

$$(-\frac{a_2}{a_1} t_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} t_n, \underbrace{t_2, t_3, \ldots t_n}_{\text{parametry}}), \qquad \text{gdzie } t_2, t_3, \ldots, t_n \in K.$$

W szczególności rozwiązania te są postaci:

$$t_2(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \ldots, 0) + t_3(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \ldots, 0) + \ldots + t_n(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \ldots, 1).$$

Baza powstaje przez przyjęcie za jeden z parametrów 1, a za pozostałe – 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $\dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $r(A) = r(A_u)$.

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy. Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Załóżmy, że zmienne zależne to $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, a parametry: $x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-r}}$.
- Rozwiązanie ogólne układu U' ma, dla pewnych $c_{ij} \in K$, postać:

$$\begin{cases} x_{j_1} & = c_{11}x_{t_1} + c_{12}x_{t_2} + \ldots + c_{1,n-r}x_{t_{n-r}} \\ & \vdots \\ x_{j_r} & = c_{r1}x_{t_1} + c_{r2}x_{t_2} + \ldots + c_{r,n-r}x_{t_{n-r}} \end{cases} \qquad (*)$$

- Rozważmy układ $n - r$ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ takich, że α_j jest rozwiązaniem powyższego układu $(*)$ powstałym przez wstawienie za j-ty parametr 1.
- Innymi słowy, jeśli $\alpha_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, to $a_{jt_1} = 0, \ldots, a_{jt_j} = 1, \ldots, a_{jt_{n-k}} = 0$. Twierdzimy, że układ ten jest bazą zbioru rozwiązań układu U'.

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy. Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Załóżmy, że zmienne zależne to $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, a parametry: $x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-r}}$.
- Rozwiązanie ogólne układu U' ma, dla pewnych $c_{ij} \in K$, postać:

$$\begin{cases} x_{j_1} & = c_{11}x_{t_1} + c_{12}x_{t_2} + \ldots + c_{1,n-r}x_{t_{n-r}} \\ & \vdots \\ x_{j_r} & = c_{r1}x_{t_1} + c_{r2}x_{t_2} + \ldots + c_{r,n-r}x_{t_{n-r}} \end{cases} \qquad (*)$$

- **Przykład.** Rozwiązanie ogólne układu U postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

ma dwa parametry x_3, x_4. Bierzemy $\alpha_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 0, 1)$.

Dowód (b).

- Jeśli dla $b_1, \ldots, b_{n-r} \in K$ mamy:
$$b_1\alpha_1 + \ldots + b_{n-r}\alpha_{n-r} = 0,$$
to dla i-tych współrzędnych $a_{1i}, \ldots, a_{n-r,i}$ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ mamy:
$$b_1 a_{1i} + \ldots + b_{n-r} a_{n-r,i} = 0,$$
Zatem biorąc i równe kolejno $t_1, \ldots t_{n-r}$ dostajemy $b_1 = \ldots = b_{n-r} = 0$.
- Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ rozpina zbiór rozwiązań układu $(*)$. Jest bowiem jasne, że wektor $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ spełnia układ $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z jego współrzędnych jest określoną kombinacją liniową współrzędnych $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}$.
- Inaczej mówiąc α jest rozwiązaniem układu U' wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\alpha = a_{t_1}\alpha_1 + \ldots + a_{t_{n-r}}\alpha_{n-r}.$$
Zatem zbiór rozwiązań układu U' równy jest $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r})$, co kończy dowód (b) i całego twierdzenia.

Dowód (c) (przypomnienie).

- Jeśli $\alpha = (s_1 \dots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U, czyli
$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \ a_{12}s_2 + \ldots + \ a_{1n}s_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m. \end{cases}$$
- Wówczas $\gamma = (r_1, \dots, r_n) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu U wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma - \alpha$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego odpowiadającego U.
$$\begin{cases} a_{11}r_1 + \ldots + \ a_{1n}r_n & = b_1 \\ & \ldots \\ a_{m1}r_1 + \ldots + a_{mn}r_n & = b_m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}(s_1 - r_1) + \ldots + \ a_{1n}(s_n - r_n) & = 0 \\ & \ldots \\ a_{m1}(s_1 - r_1) + \ldots + a_{mn}(s_n - r_n) & = 0. \end{cases}$$

Wniosek

Niech V będzie podprzestrzenią w K^n. Wówczas:

- V jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i współczynnikach w ciele K,
- jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań,
- jeśli $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Definicja

Jeśli $V \subseteq K^n$ jest przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych U, to mówimy, że przestrzeń V jest **opisana układem** U.

Wniosek

Niech V będzie podprzestrzenią w K^n. Wówczas:

- V jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i współczynnikach w ciele K,
- jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań,
- jeśli $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Idea: Jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem równania

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

to $(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozwiązaniem równania

$$s_1x_1 + \ldots + s_nx_n = 0.$$

Wróćmy do kluczowego przykładu.

Kluczowy przykład. Niech $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, gdzie $a_1 \neq 0$. Wówczas przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)$ opisana jest przez układ równań postaci:

$$\begin{cases} -\frac{a_2}{a_1}x_1 + x_2 & = 0 \\ -\frac{a_3}{a_1}x_1 + x_3 & = 0 \\ & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}x_1 + x_n & = 0 \end{cases}.$$

Tym razem szukamy takich n-tek współczynników $(t_1, \ldots, t_n)$, aby równanie liniowe

$$t_1x_1 + \ldots + t_nx_n = 0$$

miało z góry zadane rozwiązanie

$$(a_1, \ldots, a_n).$$

Zbiór wszystkich takich $(t_1, \ldots, t_n)$ jest podprzestrzenią w K^n, której bazą są wektory

$$(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \ldots, 1).$$

Wniosek

Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U. Jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań. Dla $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Dowód: Jeśli $(s_{11}, \dots, s_{1n}), \dots, (s_{m1}, \dots, s_{mn})$ są rozwiązaniami układu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ \qquad \ldots & \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n & = 0 \end{cases},$$

to $(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ są rozwiązaniami układu:

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + \ldots + s_{1n}x_n & = 0 \\ \qquad \ldots & \\ s_{m1}x_1 + \ldots + s_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Dowód: Jeśli $(s_{11}, \ldots, s_{1n}), \ldots, (s_{m1}, \ldots, s_{mn})$ jest bazą przestrzeni V rozwiązań układu o macierzy schodkowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

to na mocy Twierdzenia Kroneckera-Capellego $m = n - k$, co więcej wektory

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$$

są liniowo niezależne i są rozwiązaniami układu o macierzy rzędu m postaci

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \ldots & s_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ale ten układ ma przestrzeń rozwiązań wymiaru $n - m = n - (n - k) = k$.
Czyli jest to dokładnie $\text{lin}((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{kn}))$ – przestrzeń wymiaru k.

Przykład. Rozważmy

$$V = \text{lin}((1,2,0,1,0),(0,0,1,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Rozwiązania układu równań o macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

stanowi przestrzeń współczynników wszystkich równań liniowych, których rozwiązania zawierają V. Wybierając różne bazy tej przestrzeni dostajemy różne (ale równoważne) układy równań opisujące V, na przykład dla bazy

$$(-2,1,0,0,0), \quad (-1,0,-1,1,0), \quad (0,0,-1,0,1)$$

mamy następujący układ opisujący V:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 & = 0 \\ -x_3 + x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Wnioski:

- Każdą podprzestrzeń w K^n możemy opisać albo jako przestrzeń rozpiętą na pewnym układzie wektorów (tw. Steinitza), albo jako przestrzeń rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań (tw. K-C).
- Zauważmy, że jeśli V_1 oraz V_2 są podprzestrzeniami w K^n opisanymi układami równań U_1 oraz U_2, to podprzestrzeń
$$V_1 \cap V_2$$
jest opisana układem równań złożonym ze wszystkich równań z U_1 oraz wszystkich równań z U_2.
- Zauważmy, że jeśli $V_1 = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $V_2 = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ są podprzestrzeniami przestrzeni V, to podprzestrzeń:
$$W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$$
złożona jest ze wszystkich wektorów postaci $\alpha + \beta$, gdzie $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$.