Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 6, 9.11.2021 r.

BYŁO

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nazwiemy **liniowo niezależnym**, jeśli nie jest liniowo zależny. Układ wektorów $S \subset V$ jest liniowo niezależny, jeśli dowolny jego skończony podukład jest liniowo niezależny. Pusty układ wektorów jest liniowo niezależny (mówimy też, że $\mathrm{lin}(\emptyset) = \{0\}$).

BYŁO

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

BYŁO

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Uwaga. Układ $\{(1,0,0),(2,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo

$$2(1,0,0) + (-1)(2,0,0) + 0(1,1,1) = (0,0,0)$$

ale

- $(1,1,1)$ **nie jest kombinacją liniową** $(1,0,0),(2,0,0)$!
- $(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0) + 0(1,1,1)$.
- $(2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(1,1,1)$.

Uwaga 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\beta \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\beta - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.
- Istnieją wówczas $b, a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, spełniające
$$b\beta + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$
- Gdyby $b = 0$, to $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, a działo by się to przy nie wszystkich $a_i = 0$, co przeczyłoby liniowej niezależności układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- A zatem $b \neq 0$ i mamy $\beta = -\frac{a_1}{b}\alpha_1 - \ldots - \frac{a_k}{b}\alpha_k$, czyli $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Definicja 1.

Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V jest

- **maksymalnym układem liniowo niezależnym,** jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i każdy większy układ – to znaczy taki układ wektorów przestrzeni V, który zawiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jako podukład właściwy – jest liniowo zależny
- **minimalnym układem rozpinającym** V, jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V i żaden mniejszy układ – to znaczy żaden podukład właściwy układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie rozpina V.

- **Przykład 1.** Układ $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ nie jest maksymalnym układem liniowo niezależnym $\mathbb{R}^3$. Jest to bowiem podukład właściwy układu liniowo niezależnego $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.

- **Przykład 2.** Układ $(1, 0, 0), (2, 0, 0)$ nie jest minimalnym układem rozpinającym $V = \text{lin}((1, 0, 0), (2, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^3$, bo układ $(1, 0, 0)$ jest jego podukładem właściwym i $V = \text{lin}((1, 0, 0))$.

Twierdzenie 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.

- Gdyby układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$$

byłby liniowo niezależny.

- Wówczas jednak, zgodnie z Uwagą 1, α nie może należeć do $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
- To jest jednak niemożliwe, bo $V = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zgodnie z definicją bazy.
- Zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w V.

Twierdzenie 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*).

- Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny. Pozostaje wykazać, że $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
- Jednak z maksymalności tego układu wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- W szczególności z uwagi wynika, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. A zatem istotnie $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V.

- Gdyby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ rozpinający V.
- Weźmy jednak dowolny wektor spośród $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie należący do tego podukładu. Jest on kombinacją liniową wektorów $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$, bo podukład ten rozpina (ponoć) przestrzeń V.
- Daje to sprzeczność z liniową niezależnością układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Twierdzenie 1.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Mamy minimalny układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ rozpinający V.

- Gdyby np. $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$.
- Wówczas jednak $V = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$, bo dla dowolnego $\alpha \in V$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \\ &= a_1\alpha_! + \ldots + a_k(b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}) = \\ &= (a_1 + a_kb_1)\alpha_1 + \ldots + (a_{k-1} + a_kb_{k-1})\alpha_{k-1}. \end{aligned}$$

  Sprzeczność z (iii).

Nasz cel - Twierdzenie 1.

Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Uwaga. Można udowodnić, że każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Wymaga to szeregu narzędzi ze wstępu do matematyki. Opowiem o tym w dodatkach.

Definicja 2.

Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n **wymiarowa**, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas

$$\dim V = n$$

i liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni** V. Przyjmujemy też $\dim\{0\} = 0$.

Mówimy, że przestrzeń V jest **skończenie wymiarowa**, jeśli V jest n wymiarowa dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa, to V nazywamy **nieskończenie wymiarową** i piszemy $\dim V = \infty$.

Kilka ważnych przykładów.

- Oczywiście
$$\dim K^n = n,$$
o czym świadczy choćby baza standardowa.
- Jeśli $V = M_{m\times n}(K)$, to baza przestrzeni V złożona jest (na przykład) z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe (zwanych **jedynkami macierzowymi**). Nietrudno zatem widzieć, że
$$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n.$$
- Niech
$$V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$
Wówczas $\dim V = 2$, bo V ma bazę postaci $\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
- Mamy wreszcie $\dim K[x] = \infty$. Również $\dim K^\infty = \infty$, choć wymiary te są różnymi liczbami kardynalnymi (definicja na wstępie do matematyki).

Twierdzenie (Steinitz, 1910).

Jeśli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżących w przestrzeni

$$V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

jest liniowo niezależny, to:

(a) $k \leq m$,

(b) z układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ można wybrać taki podukład $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}$, że:

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a). Stosujemy indukcję ze względu na m.
- Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli niezerowe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\mathrm{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, gdzie $a_1, \ldots, a_k$ to niezerowe elementy K, zaś układ
$$a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$$
jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.
- Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Po ewentualnym przenumerowaniu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ weźmy takie a_{ij}, dla $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$, że $a_{11} \neq 0$ oraz:
$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m,$$
$$\ldots$$
$$\alpha_k = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \ldots + a_{km}\beta_m.$$

Dowód tw. Steinitza. Cd uzasadnienia (a).

- Dla $i = 2, 3, \ldots, k$ określamy układ wektorów $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$:

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\alpha_1 = \underbrace{\mathbf{a_{i1}}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{im}\beta_m}_{\alpha_i} - \frac{\mathbf{a_{i1}}}{\mathbf{a_{11}}}\underbrace{(\mathbf{a_{11}}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m)}_{\alpha_1}.$$

- Weźmy $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkie równe 0, że $c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0$, czyli:

$$c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\alpha_1\right) =$$

$$-\frac{c_2a_{21} + c_3a_{31} + \ldots + c_ka_{k1}}{a_{11}}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = 0.$$

- Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny, więc $c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$. Sprzeczność. Zatem układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- Zatem układ $k - 1$ liniowo niezależnych wektorów $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ zawarty jest w przestrzeni rozpiętej przez $m - 1$ wektorów postaci $\mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$. Z założenia indukcyjnego mamy więc $k - 1 \leq m - 1$. A zatem $k \leq m$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$$
jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a) takie s istnieje).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$$
jest liniowo zależny.
- Na mocy Uwagi 1 mamy zatem:
$$\beta_j \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$
W szczególności
$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

Dowód tw. Steinitza. Cd uzasadnienia (b).

- Mamy
$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$
- Oczywiście wszystkie α_i są kombinacjami liniowymi β_j więc
$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$
- Z udowodnionego już punktu (a) wynika, że
$$k + s \leq m,$$
a więc
$$s \leq m - k.$$
- Stąd dołączając do układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ byle jakie $m - k - s$ wektorów $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-k-s}$ spośród β_i, dla $i \neq i_1, \ldots, i_s$, otrzymujemy układ spełniający
$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-k-s}).$$

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Uwaga: to nam daje dowód Twierdzenia 1.

- Punkt (b) oznacza, że jeśli przestrzeń liniowa ma n-elementową bazę, to każda jej baza ma n elementów. A zatem pojęcie wymiaru $\dim V$ przestrzeni liniowej V rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest dobrze określone.
- Punkt (a) oznacza, że jeśli $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to $\dim W \leq \dim V$.

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (a)

- Weźmy najdłuższy możliwy liniowo niezależny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w W (na mocy tw. Steinitza długość układu liniowo niezależnego w W jest $\leq m$).
- Inkluzja $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$, jest oczywista, bo skoro wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ należą do W, to każda ich kombinacja liniowa też (bo W to podprzestrzeń).
- Weźmy dowolny wektor $\alpha \in W$. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest dłuższy niż układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, więc jest liniowo zależny.
- Na mocy „uwagi z poprzedniego wykładu": $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Wobec dowolności α otrzymujemy drugą inkluzję $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \supseteq W$.

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (b).

- Skoro układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V, to
$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l).$$
W szczególności:
- układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ zawarty jest w $\mathrm{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$, a więc na mocy tw. Steinitza $k \leq l$,
- układ liniowo niezależny $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ zawarty jest w $\mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, a więc na mocy tw. Steinitza $l \leq k$.

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.
- Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V.
- Z każdego układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpinającego V można wybrać bazę podprzestrzeni V.
- Jeśli $\dim V = k$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni K.
- Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas $\dim W \leq \dim V$. Przy tym jeśli $\dim W = \dim V$, to $W = V$.

Twierdzenie 2.

Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 8}(\mathbb{R}).$$

- $w(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,0,1,1,2,3,1,2),(4,1,3,1,0,0,1,1))) = 2,$
- $k(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,4),(0,1),(1,3),(1,1),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1))) = 2.$

Twierdzenie 2.

Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Dowód. Niech $A' \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą schodkową zredukowaną o wierszach $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ otrzymaną z A elementarnymi operacjami na wierszach. Niech $\alpha'_1, \ldots, \alpha_r{}'$ będą wszystkimi niezerowymi wierszami macierzy A'. Wówczas:

(i) $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ – to było dwa wykłady temu,

(ii) $\alpha'_1, \ldots, \alpha_r{}'$ jest bazą przestrzeni rozpiętej przez wiersze macierzy A.

Zatem $w(A) = r$.

Dowód (cd.)

- Załóżmy, że w macierzy schodkowej A' pierwsze niezerowe wyrazy w wierszach $\alpha'_1, \ldots, \alpha_r{}'$ znajdują się odpowiednio w kolumnach o indeksach:
$$s_1 < s_2 < \ldots < s_r{}'.$$
Pokażemy, że $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ stanowią bazę $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
- Załóżmy, że istnieją $a_1, \ldots, a_r \in K$, że:
$$a_1\beta_{s_1} + \ldots + a_r\beta_{s_r} = 0.$$
- Zobaczmy, że jeśli $\beta'_{s_1}, \ldots, \beta'_{s_r}$ powstają z $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ przez wykonanie elementarnej operacji σ na wierszach A
$$\begin{bmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{bmatrix}\beta'_1 & \cdots & \beta'_n\end{bmatrix}$$
to
$$a_1\beta'_{s_1} + \ldots + a_r\beta'_{s_r} = 0.$$

Dowód (cd.)

- Argumenty są podobne dla każdej operacji elementarnej. Na przykład, dodajmy do j-tego wiersza i-ty przemnożony przez a:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ {\color{red} b_{s_1 i}} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} + a \cdot {\color{red} b_{s_1 i}} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ {\color{red} b_{s_r i}} \\ \vdots \\ b_{s_r j} + a \cdot {\color{red} b_{s_r i}} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ {\color{red} 0} \\ \vdots \\ 0 + a \cdot {\color{red} 0} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Wniosek: układ $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta'_{s_1}, \ldots, \beta'_{s_r}$ jest liniowo niezależny.

- A zatem wykonujemy operacje elementarne na wierszach A aż dostaniemy postać schodkową zredukowaną A''.

Dowód (cd.)

- Kolumna s_i-ta β''_{s_i} macierzy zredukowanej A'' to i-ty wektor bazy standardowej ϵ_i przestrzeni K^m, czyli:

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Stąd $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.
- A zatem $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ to układ liniowo niezależny. Czy jest to układ rozpinający $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$?

Dowód (cd.)

- Niech β będzie dowolną kolumną macierzy A. Szukamy $a_1, \ldots, a_r$ takich, że:

$$a_1\beta_{s_1} + \ldots + a_r\beta_{s_r} = \beta.$$

- Dostajemy układ równań liniowych o macierzy rozszerzonej:

$$U = \left[\begin{array}{ccc|c} \beta_{s_1} & \cdots & \beta_{s_r} & \beta \end{array}\right] \qquad (*)$$

- Sprowadzenie macierzy U do postaci zredukowanej U'' odbywa się przy pomocy tych samych operacji, które sprowadzają A do A'', a więc pierwsze r kolumn U'' to pierwsze r wektorów bazy standardowej.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \beta_{s_1} & \cdots & \beta_{s_r} & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_r & \beta'' \end{array}\right] = U''$$

- Tylko pierwsze r wierszy A'', a więc i macierzy U'', jest niezerowych.
- Analogicznie jak w poprzednim dowodzie mamy:

$$a_1\epsilon_1 + \cdots + a_r\epsilon_r = \beta''.$$

Ale β'' jest kolumną macierzy A'' (bo była kolumną A), więc ma tylko pierwsze r niezerowych współrzędnych, co oznacza, że układ $(*)$ ma rozwiązanie.

Definicja 3.

Rzędem macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Wniosek z dowodu wyżej: rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Przykłady:

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1, \quad r\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Definicja 3.

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Wniosek z dowodu wyżej: rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Uwaga. Licząc rząd można wykonywać operacje elementarne na... kolumnach!

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe wiersze:

2. Odejmujemy ostatnią kolumnę od każdej z pozostałych kolumn:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -n & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = n-1.$$

Dostajemy macierz w postaci schodkowej o $n-1$ niezerowych wierszach.