Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 5, 2.11.2021 r.

Na poprzednim wykładzie:

- aksjomaty przestrzeni liniowej,
- przestrzenie liniowe ciągów, macierzy, wielomianów, itd.
- podprzestrzenie,
- kombinacje liniowe, przestrzeń rozpięta na układzie wektorów.

Problem: co mówi nam o przestrzeni liniowej V informacja:

$$V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)?$$

Uwaga 1.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $v \in V$ oraz $a \in K$. Wówczas

$$a \cdot v = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \quad \text{lub} \quad v = 0.$$

Dowód: ćwiczenie. Warto wyprowadzić najpierw z aksjomatów dwie obserwacje.

- Niech $u, v \in V$. Wówczas istnieje dokładnie jeden $x \in V$ taki, że $u + x = v$.
- Niech $v \in V$ oraz $a \in K$. Zachodzą równości $a \cdot 0 = 0$ oraz $0 \cdot v = 0$.

* * *

W pokazywanych ostatnio przykładach przestrzeni liniowych (ciągi, macierze, funkcje) fakt ten wynika w zasadzie bezpośrednio z tego, że dla $a, b \in K$ mamy:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0.$$

Przypomnijmy, że jeśli wektory $\beta_1, \ldots, \beta_m$ należą do przestrzeni V, to rozważać możemy zbiór kombinacji liniowych tych wektorów, czyli

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

W zbiorze tym są wszystkie wektory postaci $a_1\beta_1 + \ldots + a_m\beta_m$, dla $a_1, \ldots, a_m \in K$, a więc np.

$$\beta_1, \quad \beta_1 + \beta_3, \quad \beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_m, \quad \ldots \quad , \beta_1 + \ldots + \beta_m.$$

Uwaga 2.

Jeśli V jest przestrzenią liniową oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m \in V$, to

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq V.$$

Przykładowo: jeśli wektory $(0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{R}$, to dla każdych $s, t \in \mathbb{R}$ rozwiązaniem tego układu jest wektor postaci $s(0, -1, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$.

Definicja 1.

Układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_m$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_m$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\beta_1 + \ldots + a_m\beta_m = 0.$$

Intuicja: jeśli układ $\beta_1, \ldots, \beta_m$ jest liniowo zależny, to liczba m nie daje *dostatecznej informacji geometrycznej* o przestrzeni:

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Przykład. Układ $(1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0), (5, 0, 0)$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo:

$$1(1, 0, 0) + 1(2, 0, 0) + 1(3, 0, 0) + 1(4, 0, 0) + (-2)(5, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

ale

$$\mathrm{lin}((1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0), (5, 0, 0)) = \mathrm{lin}((1, 0, 0)).$$

Definicja 1.

Układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_m$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_m$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\beta_1 + \ldots + a_m\beta_m = 0.$$

Definicja 2.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nazwiemy **liniowo niezależnym**, jeśli nie jest liniowo zależny. Innymi słowy, dla takiego układu wektorów z równości

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0,$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Pusty układ wektorów uważamy za liniowo niezależny.

Przykład 1. Układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny, na mocy Uwagi 1.

Przykład 2. Układ zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Przykład 3. W przestrzeni K^n rozważmy układ wektorów

$$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n,$$

zdefiniowany w następujący sposób, dla $i = 1, \ldots, n$:

$$\epsilon_i = (a_1, \ldots, a_n), \quad \text{gdzie } a_j = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Na przykład dla $n = 3$ mamy

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0), \epsilon_2 = (0, 1, 0), \epsilon_3 = (0, 0, 1).$$

Układ $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ jest liniowo niezależny.

Istotnie, jeśli $a_1\epsilon_1 + \ldots + a_n\epsilon_n = (0, \ldots, 0)$, to zgodnie z działaniami w K^n mamy: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$. A zatem $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$.

Przykład 4. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2) + \mathbf{(-\sqrt{2})}(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \mathbf{\frac{1}{2}}(0,2\sqrt{2},0) =$$
$$(2,0,4) + \qquad (-2,-\sqrt{2},-4) + \qquad (0,\sqrt{2},0) =$$
$$(2-2+0\ , \qquad 0-\sqrt{2}+\sqrt{2} \quad , \qquad 4-4+0) = (0,0,0).$$

Jeżeli jednak rozpatrzymy $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$, wówczas wektory te są liniowo niezależne! Istotnie, dla liczb wymiernych a, b, c warunek

$$\boldsymbol{a}(1,0,2) + \boldsymbol{b}(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \boldsymbol{c}(0,2\sqrt{2},0) = (0,0,0)$$

oznacza, że

$$(a+\sqrt{2}b, \quad b+2\sqrt{2}c, \quad 2a+2\sqrt{2}b) = (0,0,0),$$

a zatem $a = b = c = 0$.

Przykład 5.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

- Jednak $a_{2k} = \ldots = a_{rk} = 0$, bo A jest schodkowa. Co więcej, $a_{1k} \neq 0$. A zatem mamy $\lambda_1 a_{1k} = 0$, czyli $\lambda_1 = 0$ – na mocy Uwagi 1.

Przykład 5.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- A zatem $\lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$. Skoro $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ są kolejnymi wierszami macierzy schodkowej, to z założenia indukcyjnego wektory te tworzą układ liniowo niezależny, czyli mamy $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_r = 0$.
- Pokazaliśmy, że $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$ implikuje $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Uwaga. Układ $\{(1,0,0),(2,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo

$$2(1,0,0) + (-1)(2,0,0) + 0(1,1,1) = (0,0,0)$$

ale

- $(1,1,1)$ **nie jest kombinacją liniową** $(1,0,0),(2,0,0)$!
- $(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0) + 0(1,1,1)$.
- $(2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(1,1,1)$.

Intuicja: liniowo zależny układ rozpinający nie jest *oszczędny* – można go pomniejszyć i wciąż rozpinać tę samą podprzestrzeń.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Weźmy $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, że
$$a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k = 0.$$
- Po ewentualnym przenumerowaniu wektorów możemy zakładać, że $a_1 \neq 0$.
- Wtedy: $a_1\beta_1 = -a_2\beta_2 - \ldots - a_k\beta_k$, czyli
$$\beta_1 = -\frac{a_2}{a_1}\beta_2 - \frac{a_3}{a_1}\beta_3 - \ldots - \frac{a_k}{a_1}\beta_k.$$

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że
$$\beta_1 = b_2\beta_2 + \ldots + b_k\beta_k.$$
- Dostajemy kombinację liniową: $\beta_1 - b_2\beta_2 - \ldots - b_k\beta_k = 0$.
- Współczynnik przy β_1 jest równy 1, a więc jest niezerowy. Stąd układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny.

Wniosek 1

Niech $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq 0$. Wówczas z układu $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ wybrać można liniowo niezależny podukład $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ taki, że

$$V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Dowód.

- Weźmy najmniejsze n, że z układu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ nie można wybrać podukładu liniowo niezależnego, rozpinającego V.
- A zatem istnieje β_i, które jest kombinacją liniową pozostałych wektorów z układu $\mathcal{B}$, nazwijmy je $\mathcal{B}'$. Oczywiście $\text{lin}(\mathcal{B}) = \text{lin}(\mathcal{B}')$.
- Nowy podukład $\mathcal{B}'$ ma mniej niż n elementów (ale więcej niż 0), a więc zgodnie z założeniem istnieje podukład liniowo niezależny $\mathcal{A}$ układu $\mathcal{B}'$ taki, ze $\text{lin}(\mathcal{B}') = \text{lin}(\mathcal{A})$. A zatem $\mathcal{A}$ jest również podukładem liniowo niezależnym w $\mathcal{B}$ i mamy $\text{lin}(\mathcal{A}) = \text{lin}(\mathcal{B})$, sprzeczność.

Twierdzenie – nasz cel (dowód na kolejnym wykładzie)

Niech $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Jeśli dla pewnych układów liniowo niezależnych $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s\}$ mamy

$$V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s),$$

to $r = s$. Co więcej, żaden układ liniowo niezależny zawarty w V nie może mieć więcej niż r elementów. Liczbę r nazwiemy **wymiarem przestrzeni V**.

Lemat (Steinitz, 1910) – również cel na kolejny wykład.

Jeśli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżących w przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ jest liniowo niezależny, to:

(a) $k \leq m$,

(b) z układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ można wybrać taki podukład $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}$, że:

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Definicja 4.

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Przykład 1. Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest **bazą standardową** przestrzeni K^n.

Dowód.:

- Wiemy, że układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ jest liniowo niezależny.
- Mamy $\mathrm{lin}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \subseteq K^n$.
- Mamy również $\mathrm{lin}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \supseteq K^n$, bo dla dowolnego $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, 0, ...) + x_2(0, 1, 0, ...) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1).$$

Definicja 4.

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Przykład 2. Niech

$$V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\},$$

czyli $(x_1, x_2, x_3) \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = -2x_2 + x_3$. Wektory w V są zatem postaci:

$$(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) = (2x_2, x_2, 0) + (x_3, 0, x_3) = x_2(-2, 1, 0) + x_3(1, 0, 1).$$

Stąd

$$V = \mathrm{lin}((-2, 1, 0), (1, 0, 1)).$$

Wektory $(-2, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ są oczywiście liniowo niezależne, a zatem układ ten jest bazą V.

Definicja 4.

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Przykład 3. Dwie różne bazy przestrzeni $M_{2\times 2}(K)$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Uwaga. Oczywiście twierdzenie nie zachodzi, gdy nie mamy bazy, np. dla

$$V = \operatorname{lin}((1,0,0),(2,0,0))$$

mamy:

$$\begin{aligned}(3,0,0) &= 1(1,0,0) + 1(2,0,0) = \\ &7(1,0,0) - 2(2,0,0).\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Pokażmy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, więc każdy $\alpha \in V$ jest kombinacją wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.
- Mamy $(a_1 - a'_1)\alpha_1 + \ldots + (a_k - a'_k)\alpha_k = 0$.
- Z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wynika zatem, że $a_1 - a'_1 = \ldots = a_k - a'_k = 0$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Pokażmy (2) $\Rightarrow$ (1). Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V. Pozostaje pokazać, że jest liniowo niezależny.
- Przypuśćmy, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Wówczas mamy: $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0\alpha_1 + \ldots + 0\alpha_k = 0$,
- Skoro także 0 ma jednoznaczny rozkład w V, to $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_k = 0$, co dowodzi liniowej niezależności $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Definicja 6.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą V. **Współrzędnymi wektora** $\alpha \in V$ **w bazie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy układ elementów $a_1, \ldots, a_k$ ciała K spełniających

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k.$$

Przykłady

- Wektor $(1, 2, 1)$ ma współrzędne $1, 2, 1$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bo
$$(1, 2, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1).$$

- Wektor $(1, 2, 1)$ ma współrzędne $-1, 1, 1$ w bazie $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bo
$$(1, 2, 1) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 1, 1).$$

Definicja 7.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady (niektóre są ciekawymi ćwiczeniami):

- układ $\{x, x^2, x^3, \ldots, \}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,
- układ ciągów $\{a_1 = (1, 0, 0, \ldots), a_2 = (0, 1, 0, \ldots), a_3 = (0, 0, 1, \ldots), \quad \ldots \quad \}$ jest liniowo niezależny w K^∞,
- układ ciągów $\{(1, t, t^2, t^3, \ldots), t \in (0, 1)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^\infty$,
- układ $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots\} = \{\sqrt{p}, p \in P\}$, gdzie P - zbiór liczb pierwszych, jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,
- układ $\{\sin(x), \sin^2(x), \sin^3(x), \ldots\} = \{\sin(x)^n, n \in \mathbb{N}_+\}$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Definicja 8.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ jest bazą przestrzeni $K[x]$,
- Układ $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 2)\}$ jest liniowo zależny, więc nie jest bazą przestrzeni $W = \mathrm{lin}((1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 2))$.
- Układ $\{a_1 = (1, 0, 0, \dots), a_2 = (0, 1, 0, \dots), a_3 = (0, 0, 1, \dots), \quad \dots \quad \}$ **nie jest bazą** K^∞, bo wektor $(1, 1, 1, \dots)$ nie jest kombinacją liniową (skończonego podukładu!) wektorów $a_1, a_2, \dots$