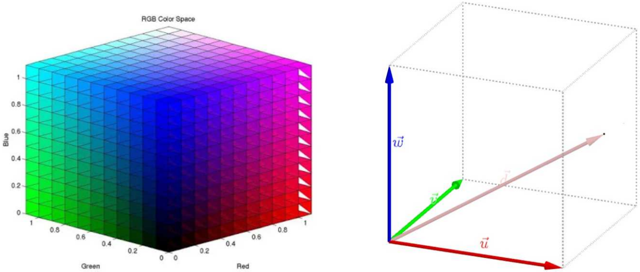
Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 4, 26.10.2021 r.

Tematem tego wykładu są przestrzenie liniowe, czyli struktury o charakterze geometrycznym oparte o pewne operacje na wektorach i skalarach, niekoniecznie rozumianych geometrycznie, ale np. tak: wektor – barwa, skalar – skala natężenia.



Rysunek 1. Źródła: https://www.dynamsoft.com/ oraz `https://www.geogebra.org/m/Dq2A7aRv`

Definicja 1.

Przestrzenią liniową nad ciałem $(K, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy zbiór V, wraz z:

- odwzorowaniem: $\oplus : V \times V \longrightarrow V$, zwanym dodawaniem wektorów,
- odwzorowaniem: $\otimes : K \times V \longrightarrow V$, zwanym mnożeniem wektora przez skalar,
- wyróżnionym elementem Θ w V zwanym wektorem zerowym,

przy czym spełnione są następujące aksjomaty przestrzeni liniowej:

$\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}$	$\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$	łączność $\oplus$
$\forall_{\alpha,\beta\in V}$	$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$	przemienność $\oplus$
$\forall_{\alpha\in V}$	$\alpha \oplus \Theta = \alpha$	Θ jest elem. neutralnym $\oplus$
$\forall_{\alpha\in V}\exists_{\gamma\in V}$	$\alpha \oplus \gamma = \Theta$	istnienie wekt. przeciwnego
$\forall_{\alpha\in V}$	$1 \otimes \alpha = \alpha$	mnożenie wektora przez 1
$\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}$	$(a \cdot b) \otimes \alpha = a \otimes (b \otimes \alpha)$	zgodność $\cdot$ z mnożeniem $\otimes$
$\forall_{\alpha\in V}, \forall_{a,b\in K}$	$(a + b) \otimes \alpha = (a \otimes \alpha) \oplus (b \otimes \alpha)$	rozdzielność $\otimes$ względem $+$
$\forall_{\alpha,\beta\in V}, \forall_{a\in K}$	$a \otimes (\alpha \oplus \beta) = (a \otimes \alpha) \oplus (a \otimes \beta)$	rozdzielność $\otimes$ względem $\oplus$

Przykład 1.

Niech K^n oznacza zbiór wszystkich ciągów n-elementowych o wyrazach z ciała K:

$$K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Wyraz x_i w ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy i-tą współrzędną.

Działania w K^n określone są w sposób naturalny wzorami:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,
- $a \otimes (x_1, x_2, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n)$.

Wektorem zerowym jest ciąg $(0, 0, \dots, 0)$.

Przykłady działań w przestrzeni K^n:

- dla $K = \mathbb{Z}_3$ i $n = 4$ mamy: $(1, 2, 1, 2) + 2(0, 2, 2, 1) = (1, 0, 2, 1)$,
- dla $K = \mathbb{C}$ i $n = 2$ mamy: $(1, i) + i(i, 0) = (1, i) + (-1, 0) = (0, i)$.

Przykład 2.

Niech $M_{m\times n}(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wyrazach z ciała K.

- **Sumą** macierzy $[a_{ij}]$ oraz $[b_{ij}]$ nazywamy macierz $[c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- **Iloczynem** macierzy $[d_{ij}]$ przez skalar $c \in K$ nazywamy macierz $[c \cdot d_{ij}]$.

Wektorem zerowym w $M_{m\times n}(K)$ jest **macierz zerowa** rozmiarów $m \times n$.

Przykład 1. W przestrzeni liniowej $M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 2. Układ równań nad $\mathbb{R}$ zapisany za pomocą operacji w $M_{1\times 3}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x - z & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ 3x + y + z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład 3.

Oznaczmy przez K^∞ zbiór wszystkich ciągów o wyrazach z ciała K, to znaczy:

$$K^\infty = \{(x_i) \mid x_i \in K, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Ciągi $x = (x_i)$ oraz $y = (y_i)$ dodajemy i mnożymy przez skalary według zasady:

- $(x \oplus y)_i = x_i + y_i$,
- $(a \otimes x)_i = a \cdot x_i$.

Wektorem zerowym jest ciąg, którego wszystkie wyrazy są zerem w ciele K.

Przykładowo, z równości: $\frac{1}{n} + (-1)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, zachodzącej dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, mamy równość w $\mathbb{Q}^\infty$ postaci

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\right).$$

Przykład 4.

Niech $K[x]$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach w ciele K, czyli

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid n = \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Dodawanie wielomianów i mnożenie wielomianów przez skalar są zdefiniowane w następujący sposób:

- suma wielomianów $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ oraz $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ jest wielomianem, w którym przy wyrazie x^i ma sumę współczynników $a_i + b_i$,
- iloczyn skalara $c \in K$ przez wielomian $c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ jest wielomianem, w którym przy wyrazie x^i jest współczynnik $c \cdot c_i$.

Wektorem zerowym w $K[x]$ jest wielomian zerowy.

Przykład 5.

Niech $F(X, K)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji z danego niepustego zbioru X do ciała K. Dla $f, g \in F(X, K)$ i dla $a \in K$ funkcje $f \oplus g$ oraz $a \otimes f$ określone są warunkami:

- $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(a \otimes f)(x) = af(x)$.

Element zerowy to funkcja stale równa 0.

Dla ciała K przestrzenie

$$K^n, \quad M_{m\times n}(K), \quad K^\infty$$

są szczególnymi przykładami przestrzeni $F(X, K)$, gdzie X:

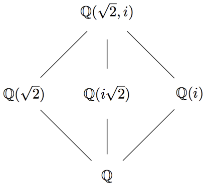
- funkcje z $\{1, 2, \ldots, n\}$ do K,
- funkcje z $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ do K,
- funkcje z $\mathbb{N}$ do K.

Przykład 6.

Jeśli K jest ciałem i L jest podciałem ciała K, to K ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem L. Elementy ciała K można traktować jako wektory, zaś L jako skalary.

Przykłady:

- przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$,
- przestrzeń $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,
- przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ (bardzo skomplikowana!),
- ciało o p^n elementach jest p. liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_p$, gdzie p – pierwsza.

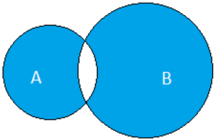


Krata podciał ciała $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Każde z ciał z wyższego wiersza jest przestrzenią nad tym z niższego.

Przykład 7.

Niech X będzie zbiorem niepustym, zaś $P(X)$ – zbiorem podzbiorów zbioru X. Na zbiorze $P(X)$ określamy strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{Z}_2$.

Operacja $\triangle$ dodawania wektorów określona jest w sposób następujący dla dowolnych $A, B \in P(X)$ jako ich tzw. różnica symetryczna $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.



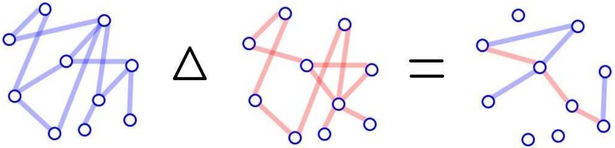
Co więcej, dla każdego $A \in P(X)$ definiujemy mnożenie wektora A przez skalar (jeden z dwóch w $\mathbb{Z}_2$):

- $0 \otimes A = \emptyset$ – zbiór pusty
- $1 \otimes A = A$.

Przykład 8.

Niech X będzie skończonym zbiorem niepustym, E zaś niech będzie podzbiorem zbioru par nieuporządkowanych zbioru X. Parę $G = (X, E)$ nazwiemy **grafem niezorientowanym** o zbiorze wierzchołków X i zbiorze krawędzi E. Jeśli $\{a, b\} \in E$ to mówimy, że między wierzchołkami a, b grafu G jest krawędź.

Określamy przestrzeń liniową $P(E)$ nad ciałem $\mathbb{Z}_2$, zwaną **przestrzenią krawędziową** grafu G, jak w poprzednim przykładzie.



Definicja 2.

Niepusty podzbiór $W \subset V$ nazywamy **podprzestrzenią przestrzeni liniowej** V jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in W$ oraz każdego $a \in K$ zachodzi:

- $\alpha + \beta \in W$,
- $a \cdot \alpha \in W$.

W każdej przestrzeni liniowej V podzbiór $\{0\}$, złożony tylko z wektora zerowego, jest jej podprzestrzenią. Nazywamy ją **podprzestrzenią zerową.**

Uwaga: wektor zerowy należy do każdej podprzestrzeni!

Definicja 2.

Niepusty podzbiór $W \subset V$ nazywamy **podprzestrzenią przestrzeni liniowej** V jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in W$ oraz każdego $a \in K$ zachodzi:

- $\alpha + \beta \in W$,
- $a \cdot \alpha \in W$.

W każdej przestrzeni liniowej V podzbiór $\{0\}$, złożony tylko z wektora zerowego, jest jej podprzestrzenią. Nazywamy ją **podprzestrzenią zerową**.

BYŁO. Rozwiązaniami dowolnego układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należące do $\mathbb{R}^5$, są również:

(a) każdy element $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = (\lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 3, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_1 \cdot 5)$,

(b) każdy element $\lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0) = (\lambda_2 \cdot 2, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot 0)$,

(c) każda kombinacja $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0)$ tych wektorów, czyli

$$(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 0).$$

Przykład 9.

Rozpatrzmy jednorodny układ równań liniowych o współczynnikach w ciele K:

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{cases}$$

Zbiór wszystkich rozwiązań układu U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n.

Uwaga: zbiór rozwiązań układu niejednorodnego nie jest podprzestrzenią!

Przykład 10.

W przestrzeni ciągów $\mathbb{R}^\infty$ wskazać można bardzo wiele podprzestrzeni, np.:

- ciągi mające skończenie wiele niezerowych wyrazów,
- ciągi ograniczone,
- ciągi zbieżne,
- ciągi $(x_i)_{i=1}^\infty$ spełniające $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$.
- ciągi $(x_i)_{i=1}^\infty$ spełniające określone rekurencje liniowe, np.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Przykład 11.

Dla każdej liczby naturalnej m niech $K_m[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej m w $K[x]$. Jest to podprzestrzeń $K[x]$.

Przykład 12.

Przykłady podprzestrzeni w przestrzeni funkcji $F(K, K)$:

- funkcje parzyste, spełniające równanie
$$f(x) = f(-x), \quad \text{dla } x \in K,$$
- funkcje nieparzyste, spełniające równanie
$$f(x) = -f(-x), \quad \text{dla } x \in K,$$
- funkcje będące rozwiązaniami równania Cauchy'ego, tzn. dla każdych $x, y \in K$:
$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
- nad $\mathbb{R}$ (i nie tylko): funkcje ograniczone, monotoniczne itd.

Definicja 3.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. **Kombinacją liniową** układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o współczynnikach $a_1, \ldots, a_k \in K$ nazywamy wektor:

$$\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i.$$

Przykłady.

- W przestrzeni $V = \mathbb{R}^4$ kombinacją liniową wektorów
$$(2, 1, -3, 4), (0, 2, 5, 1), (7, 4, 3, 2)$$
ze współczynnikami $2, -1, 1$ jest wektor
$$2(2, 1, -3, 4) - 1(0, 2, 5, 1) + 1(7, 4, 5, 2) = (11, 4, -8, 9).$$

- W przestrzeni funkcji $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kombinacją liniową wektorów $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ o współczynnikach $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest funkcja
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

- Wektor $(0, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ nie jest kombinacją liniową wektorów
$$(0, 1, 1), (-1, 0, 1),$$
bo założenie, że $(0, 3, 1) = a(0, 1, 1) + b(-1, 0, 1)$ prowadzi do układu równań $0 = -b$, $3 = a$, $1 = a + b$, który nie ma rozwiązań.

Uwaga 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad K. Jeśli wektory β, γ są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to wektory

$$\beta + \gamma \quad \text{oraz} \quad a\beta,$$

dla każdego $a \in K$, również są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Definicja 4.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$. Wówczas przez

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

oznaczamy **zbiór wszystkich kombinacji liniowych** wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Jest to podprzestrzeń V nazywana **przestrzenią rozpiętą na układzie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ **rozpina przestrzeń** V, jeśli $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to znaczy każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Przykład: zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożona z czwórek postaci:

$$(0, -s - t, s, t), \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

czyli podprzestrzeń postaci:

$$\mathrm{lin}((0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)),$$

bo dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ mamy:

$$(0, -s - t, s, t) = (0, -s, s, 0) + (0, -t, 0, t) = s(0, -1, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1).$$

* * *

Wektor $(1, 1, 1, 1)$ nie należy do $\mathrm{lin}((0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$, bo nie ma $a, b \in \mathbb{R}$, t. że:

$$(1, 1, 1, 1) = a(0, -1, 1, 0) + b(0, -1, 0, 1).$$

Uwaga 2.

Podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest najmniejszą podprzestrzenią V (względem inkluzji) zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód.

Niech W będzie dowolną podprzestrzenią zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
Z definicji podprzestrzeni W zawiera każdą kombinację liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, czyli każdy wektor z $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Stąd $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$. $\square$

Definicja 5.

Niech $A \in M_{m \times n}(K)$ będzie macierzą o wyrazach a_{ij}, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Wówczas:

- przez podprzestrzeń wierszową $W(A)$ rozumieć będziemy podprzestrzeń K^n rozpiętą przez $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$.
- przez podprzestrzeń kolumnową $K(A)$ rozumieć będziemy podprzestrzeń K^m rozpiętą przez $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}.a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$.

Uwaga 3.

Niech $A, A' \in M_{m \times n}(K)$ oraz niech

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – wiersze macierzy A,
- $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ – wiersze macierzy A'.

Jeśli założymy, że A' może być otrzymana z A za pomocą ciągu operacji elementarnych na wierszach, to wynika stąd, że $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:
$$\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$
- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ mamy:
$$\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m),$$
- dla dowolnego $1 \leq i \leq m$ oraz dowolnego niezerowego $a \in K$ mamy:
$$\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, a \cdot \alpha_i, \ldots, \alpha_m).$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$, że:

$$\begin{aligned}\beta &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_i\alpha_i + \ldots + b_j\alpha_j + \ldots + b_m\alpha_m = \\ &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + (b_i - a \cdot b_j)\alpha_i + \ldots + b_j(a\alpha_i + \alpha_j) + \ldots + b_m\alpha_m.\end{aligned}$$

Zatem $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$, że:

$$\begin{aligned}\gamma &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j(a \cdot \alpha_i + \alpha_j) + \ldots + c_m\alpha_m = \\ &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + (c_i + a \cdot c_j)\alpha_i + \ldots + c_j\alpha_j + \ldots + c_m\alpha_m.\end{aligned}$$

Zatem $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Pozostałe punkty – analogicznie (tylko łatwiej).

Uwaga do definicji 4.

Niech $X = \{\alpha_t\}_{t \in T}$ będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni V. Wówczas przez $\mathrm{lin}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych **skończonych podukładów** układu X. To znaczy:

$$\beta \in \mathrm{lin}(X) \Longleftrightarrow \beta = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_{t_i}, \text{ dla pewnych } a_1, \ldots, a_k \in K, \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_k} \in X.$$

Jeśli $V = \mathrm{lin}(X)$ to mówimy, że układ X rozpina V i przestrzeń V jest rozpięta na X. Dla układu pustego $X = \emptyset$ przyjmujemy $\mathrm{lin}(X) = \{0\}$.

Przykłady:

- $V = \mathrm{lin}(V)$,
- $K[x] = \mathrm{lin}(1, x, x^2, x^3, \ldots)$,
- Jak „wypisać minimalny"X taki, że $\mathbb{R} = \mathrm{lin}(X)$, gdzie $\mathbb{R}$ – przestrzeń nad $\mathbb{Q}$?

Za tydzień:

- minimalne układy rozpinające,
- liniowa niezależność wektorów,
- baza, wymiar przestrzeni liniowej.