Geometria z algebrą liniową I

dr Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 1, 5.10.2021 r.

Komunikacja (Arkadiusz Męcel)

- Kontakt: `a.mecel@mimuw.edu.pl`
- Konsultacje (Zoom): poniedziałki 19:00-20:00.
- Konsultacje (pokój 1110, na parterze): piątki: 10:00-11:00.
- Strona wydziałowa: www.mimuw.edu.pl/~amecel/
- Anonimowe ankiety na Moodle.

Zasady zaliczenia

- zaliczenie = obecność na ćwiczeniach + punkty
- Do zdobycia jest 300 punktów:
- kolokwium pierwsze: 2 grudnia – 80 punktów,
- kolokwium drugie: 27 stycznia – 120 punktów,
- kolokwium dodatkowe – na początku sesji,
- ćwiczenia – 80 punktów (prace domowe i praca na zajęciach),
- testy po wykładach (Moodle) – 20 punktów.
- Ocena końcowa – progi ustalane są pod koniec semestru.

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ elementów z K taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Przykłady:

- $X = \{x\}, K = \mathbb{R}$, równanie $\sqrt{2}x = \pi$, ale nie: $2x + 1 = 3$ lub $2x = x$.
- $X = \{x_1, x_2, x_3\}, K = \mathbb{Q}$, równanie: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$, ale nie $\sqrt{2}x_1 = 2$.

Pytanie na później: czego oczekujemy od zbioru K? Na razie $K = \mathbb{R}$.

Definicja 2.

Układ m **równań liniowych** na zbiorze $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o współczynnikach rzeczywistych to ciąg m równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + \ a_{32}x_2 + \ldots + \ a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1).$$

Rozwiązanie powyższego układu równań liniowych (1) to ciąg $(s_1, \ldots, s_n)$ elementów z $\mathbb{R}$, który jest rozwiązaniem każdego z m równań liniowych tego układu, to znaczy: dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$ mamy:

$$a_{i1} \cdot s_1 + a_{i2} \cdot s_2 + \ldots + a_{in} \cdot s_n = b_i.$$

Przykłady:

- $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 & = 3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + \ \ x_3 & = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 & = 0 \end{cases}$$

Obserwacja 1.

Jeśli $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ oraz $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} , \qquad (1).$$

to ciąg

$$(s_1 - s'_1, s_2 - s'_2, \ldots, s_n - s'_n)$$

jest rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ a_{32}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Obserwacja 1.

Jeśli $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ oraz $(s_1', s_2', \ldots, s_n')$ są rozwiązaniami układu równań (1), to ciąg

$$(s_1 - s_1', s_2 - s_2', \ldots, s_n - s_n')$$

jest rozwiązaniem układu równań (2).

Dowód.

- Ciągi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ oraz $(s_1', s_2', \ldots, s_n')$ sa rozwiązaniami każdego z równań
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$
- Zatem: $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n = b_i$ oraz $a_{i1}s_1' + a_{i2}s_2' + \ldots + a_{in}s_n' = b_i$.
- Po odjęciu stronami widzimy, że $(s_1 - s_1', s_2 - s_2', \ldots, s_n - s_n')$ spełnia każde z m równań układu (2)
$$a_{i1}(s_1 - s_1') + a_{i2}(s_2 - s_2') + \ldots + a_{in}(s_n - s_n') = 0,$$
co oznacza, że jest to rozwiązanie całego układu (2).

Obserwacja 2.

Załóżmy, że $(s_1, \dots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu równań (1). Wówczas każde rozwiązanie układu (1) jest postaci:

$$(s_1 + u_1, \dots, s_n + u_n) \qquad (\diamondsuit),$$

gdzie $(u_1, \dots, u_n)$ jest rozwiązaniem układu (2).

Druga obserwacja sprowadza problem znajdowania zbioru rozwiązań układu równań (1) do dwóch kroków:

- znalezienia jakiegokolwiek rozwiązania układu (1)
- znalezienia wszystkich rozwiązań układu (2).

Obserwacja 2.

Załóżmy, że $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu równań (1). Wówczas każde rozwiązanie układu (1) jest postaci:

$$(s_1 + u_1, \ldots, s_n + u_n) \qquad (\diamondsuit),$$

gdzie $(u_1, \ldots, u_n)$ jest rozwiązaniem układu (2).

Przykład. Każde rozwiązanie układu o współczynnikach w $\mathbb{R}$ postaci

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 1 \end{cases} . \qquad (\dagger)$$

można przedstawić mając rozwiązanie (-1,1,0) układu $(\dagger)$ oraz dowolne rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} . \qquad (\dagger\dagger)$$

Obserwacja 2.

Załóżmy, że $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu równań (1). Wówczas każde rozwiązanie układu (1) jest postaci:

$$(s_1 + u_1, \ldots, s_n + u_n) \qquad (\diamondsuit),$$

gdzie $(u_1, \ldots, u_n)$ jest rozwiązaniem układu (2).

Przykład. Każde rozwiązanie układu o współczynnikach w $\mathbb{R}$ postaci

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 1 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 1 \end{array}\right. . \qquad (\dagger)$$

można przedstawić mając rozwiązanie (-1,1,0) układu $(\dagger)$ oraz zbiór rozwiązań układu $(\dagger\dagger)$ postaci

$$(z, -2z, z), \text{ gdzie } z \in \mathbb{R}.$$

Zatem każde rozwiązanie układu $(\dagger)$ ma postać $(-1 + z, 1 - 2z, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R}$.

Obserwacja 2.

Załóżmy, że $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu równań (1). Wówczas każde rozwiązanie układu (1) jest postaci:

$$(s_1 + u_1, \ldots, s_n + u_n) \qquad (\diamondsuit),$$

gdzie $(u_1, \ldots, u_n)$ jest rozwiązaniem układu (2).

Dowód. Weźmy dowolne rozwiązanie $(s_1, \ldots, s_n)$ układu (1) oraz dowolne rozwiązanie $(u_1, \ldots, u_n)$ układu (2).

- Ciąg $(s_1 + u_1, \ldots, s_n + u_n)$ jest rozwiązaniem (1), bo spełnia, dla każdego i:
  $a_{i1}(s_1+u_1)+\ldots+a_{in}(s_n+u_n) = (a_{i1}s_1+\ldots+a_{in}s_n)+(a_{i1}u_1+\ldots+a_{in}u_n) = b_i+0 = b_i.$
- Przedstawmy rozwiązanie $(s'_1, \ldots, s'_n)$ układu (1) w postaci $(\diamondsuit)$. Biorąc

$$u_1 = s'_1 - s_1, \quad \ldots \quad, u_n = s'_n - s_n$$

  dostajemy $(s'_1, \ldots, s'_n) = (s_1 + (s'_1 - s_1), \ldots, s_n + (s'_n - s_n))$.

Definicja 3.

Układ U złożony z m równań liniowych na zbiorze $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

nazywamy

- **jednorodnym**, jeśli $b_i = 0$, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$,
- **niesprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań układu U jest niepusty,
- **sprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań układu U jest pusty.

Układ (2) nazywać będziemy czasem układem jednorodnym **odpowiadającym** układowi (niejednorodnemu) (1).

Definicja 4.

Układy równań liniowych określone na tym samym zbiorze n zmiennych X o zbiorze współczynników K nazwiemy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań (traktowane jako podzbiory zbioru wszystkich ciągów n-elementowych o wyrazach z K).

Przykład. Następujące układy równań liniowych zmiennych x_1, x_2 nad $\mathbb{R}$ są równoważne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} = 1 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 = -1 \end{cases}$$

Kluczowa idea: rozwiązywanie układów równań polega na zamianie bardziej skomplikowanych układów na równoważne – prostsze.

Definicja 5.

Dane sa równania liniowe U, U' nad zbiorem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$ postaci:

$$U: \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad U': \quad a_1'x_1 + a_2'x_2 + \ldots + a_n'x_n = b'.$$

- Dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ przez λU określamy równanie:

$$\lambda \cdot a_1x_1 + \lambda \cdot a_2x_2 + \ldots + \lambda \cdot a_nx_n = \lambda \cdot b.$$

- Przez $U + U'$ rozumieć będziemy równanie:

$$(a_1 + a_1')x_1 + (a_2 + a_2')x_2 + \ldots + (a_n + a_n')x_n = b + b'.$$

Obserwacja 3.

Jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem równań liniowych U_1 oraz U_2, gdzie $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$, to jest też rozwiązaniem każdego równania postaci:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \text{ gdzie } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Dowód.

- Niech $U_1 : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ oraz $U_2 : a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b'$.
- Mamy $a_1s_1 + \ldots + a_ns_n = b$ oraz $a'_1s_1 + \ldots + a'_ns_n = b'$.
- Dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\lambda_1 \cdot a_1s_1 + \ldots + \lambda_1 \cdot a_ns_n = \lambda_1 \cdot b, \quad \lambda_2 \cdot a'_1s_1 + \ldots + \lambda_2 \cdot a'_ns_n = \lambda_2 \cdot b'.$$

- A zatem $(\lambda_1a_1 + \lambda_2a'_1)s_1 + \ldots + (\lambda_1a_n + \lambda_2a'_n)s_n = \lambda_1b + \lambda_2b'$.
- A zatem $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem $\lambda_1U_1 + \lambda_2U_2$.

Obserwacja 3.

Jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem równań liniowych U_1 oraz U_2, gdzie $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$, to jest też rozwiązaniem każdego równania postaci:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \text{ gdzie } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Uwaga. Pokazaliśmy jedynie zawieranie się zbiorów rozwiązań układu $U_1 \wedge U_2$ w zbiorze rozwiązań układu $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$.

Układ równań liniowych zmiennych x_1, x_2 nad $\mathbb{R}$ złożony z równań

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie $(1, 1)$, podczas, gdy układ:

$$x_1 + x_2 = 2$$

ma ich nieskończenie wiele (nad $\mathbb{R}$).

Twierdzenie 1.

Następujące operacje przeprowadzają układ U nad $\mathbb{R}$ w układ równoważny.

(1) Dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę

(2) Zamiana dwóch równań miejscami

(3) Pomnożenie równania przez liczbę różną od zera

Dowód:

- Oczywiste dla operacji (2) i (3).
- Niech U' powstaje z U przez dodanie do i-tego równania U_i równania U_j przemnożonego przez $a \in \mathbb{R}$. Wtedy U powstaje z U' przez dodanie do i-tego równania $U_i + aU_j$ równania U_j przemnożonego przez $-a \in \mathbb{R}$.
- Na mocy Obserwacji 3 wyżej: jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem U_i, U_j, to także jest rozwiązaniem $U_i + aU_j$. A zatem jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ spełnia U, to także U'.
- Jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem $U_i + aU_j$ oraz U_j, to jest też rozwiązaniem $U_i = (U_i + aU_j) - aU_j$. A zatem jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ spełnia U', to spełnia U.

Twierdzenie 1.

Następujące operacje przeprowadzają układ U nad $\mathbb{R}$ w układ równoważny.

(1) Dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę
(2) Zamiana dwóch równań miejscami
(3) Pomnożenie równania przez liczbę różną od zera

Definicja 6.

Operacje (1)-(3) nazywamy **operacjami elementarnymi** na układzie U.

Definicja 7.

Niech U oraz U' będą równoważnymi układami równań liniowych o n zmiennych (niewiadomych). Przypuśćmy, że układ U' **można przepisać** w postaci:

$$\begin{cases} x_{j_1} & = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \ldots & \\ x_{j_k} & = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n + d_k \end{cases}$$

przy czym $j_1 < \ldots < j_k$ oraz zmienne $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ nie występują po prawej stronie (to znaczy: stoją przy nich współczynniki zerowe, czyli $c_{ij} = 0$, dla $j = j_1, \ldots, j_k$).

Mówimy wówczas, że:

- układ U' **jest rozwiązaniem ogólnym** (zadaje rozwiązanie ogólne) układu U,
- w rozwiązaniu tym $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ nazywamy **zmiennymi zależnymi**,
- pozostałe x_i nazywamy **zmiennymi niezależnymi**, albo **parametrami**.

Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Układ ten ma rozwiązanie ogólne. Jest nim na przykład:

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases},$$

bo układ ten **można przepisać** do postaci:

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ x_2 & = -x_3 - x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rozwiązanie (zmienne zależne: x_1, x_2, zmienne niezależne: x_3, x_4):

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, -s - t + \frac{1}{2}, s, t \right), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definicja 8.

Macierzą rozmiaru $m \times n$ (inaczej: macierzą o m wierszach i n kolumnach) o **wyrazach** ze zbioru K nazywamy tablicę:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $d_{ij} \in K$ dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Będziemy też pisać $D = [d_{ij}]$.

Rzędy poziome macierzy D nazywamy **wierszami**, rzędy pionowe zaś nazywamy **kolumnami**. Zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wyrazach ze zbioru K oznaczamy jako $M_{m\times n}(K)$.

Definicja 9.

Każdemu układowi równań liniowych postaci:

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \qquad\qquad \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

możemy przypisać macierz $m \times (n+1)$ postaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Nazywamy ją **macierzą** (albo **macierzą rozszerzoną**) układu U. Macierz powstałą przez pominięcie ostatniej kolumny w macierzy układu U będziemy nazywać **macierzą współczynników** układu U.

układ	macierz rozszerzona	macierz współczynników
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 3 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

układ	macierz rozszerzona
$\begin{cases} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = 1 \\ & & x_3 & = 4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ x_2 + x_3 + x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$
$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Definicja 10.

Mówimy, że macierz $A = [a_{ij}]$ jest w **postaci schodkowej**, jeśli A spełnia następujące warunki:

- każdy wiersz zerowy (tzn. złożony z samych zer) znajduje się poniżej każdego wiersza niezerowego (czyli jeśli i-ty wiersz tej macierzy jest niezerowy, to j-ty wiersz jest zerowy tylko gdy $j > i$),
- dla każdego $i > 1$ pierwszy licząc od lewej niezerowy wyraz w i-tym wierszu znajduje się w kolumnie stojącej na prawo od pierwszego niezerowego wyrazu $(i-1)$-szego wiersza.

Przykład macierzy w postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Układ, dla którego jest to macierz:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ & & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ & & & & 8x_3 & + & 9x_4 & = & 1 \\ & & & & & & 10x_4 & = & 1 \end{array} \right. .$$

Definicja 11.

Mówimy, że macierz A jest w postaci **schodkowej zredukowanej**, jeśli:

- A jest w postaci schodkowej,
- w każdym niezerowym wierszu pierwszy niezerowy wyraz wynosi 1 i jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie.

Przykłady:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Definicja 12.

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Następujące transformacje macierzy A nazywamy **operacjami elementarnymi na wierszach**.

(1) Dodanie do wiersza innego wiersza przemnożonego przez liczbę rzeczywistą

(2) Zamiana dwóch wierszy miejscami

(3) Pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera

Analogicznie definiuje się operacje elementarne na kolumnach macierzy A.

Przykłady operacji elementarnych na wierszach macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2\cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 2.

Niech K będzie ciałem. Każdą macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ można:

(i) za pomocą operacji elementarnych typu (1) i (2) sprowadzić do postaci schodkowej,

(ii) za pomocą operacji elementarnych typu (1), (2) i (3) sprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej.

Dowiedziemy tylko (i).

Dowód (i).

- Stosujemy zasadę indukcji matematycznej względem liczby m wierszy macierzy. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste.
- Załóżmy, że twierdzenie jest udowodnione dla macierzy o co najwyżej $m-1$ wierszach. Niech $A \in M_{m\times n}(K)$.
- Jeśli A jest macierzą zerową (to znaczy każdy jej wyraz jest zerem), to oczywiście jest schodkowa.
- Niech s będzie numerem pierwszej niezerowej kolumny macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{2s} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & {\color{red}a_{rs}} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ms} & * & * & * \end{bmatrix}$$

- Wybierzmy takie r, że $a_{rs} \neq 0$. Zamieniamy miejscami wiersze: pierwszy i r-ty (operacja typu (2)).

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1s} & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2s} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}0 & \color{red}\ldots & \color{red}0 & \color{red}a_{rs} & \color{red}* & \color{red}* & \color{red}* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{ms} & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_r \leftrightarrow w_1} \begin{bmatrix} \color{red}0 & \color{red}\ldots & \color{red}0 & \color{red}a_{rs} & \color{red}* & \color{red}* & \color{red}* \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2s} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{1s} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{ms} & * & * & * \end{bmatrix}$$

- Za pomocą operacji (1) zerujemy wszystkie, poza pierwszym, wyrazy w s-tej kolumnie (od i-tego wiersza odejmujemy pierwszy przemnożony przez $\frac{a_{is}}{a_{rs}}$). Otrzymujemy w ten sposób macierz $A' = [a'_{ij}]$, w której kolumny o numerach $1, \ldots, s-1$ są zerowe oraz $a'_{1s} \neq 0$ i $a'_{is} = 0$, dla $i > 1$.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{rs} & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2s} - \frac{a_{2s}}{a_{rs}} \cdot a_{rs} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{1s} - \frac{a_{1s}}{a_{rs}} \cdot a_{rs} & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{ms} - \frac{a_{ms}}{a_{rs}} \cdot a_{rs} & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{rs} & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

(Krok ten nazywany jest często **eliminacją** i pochodzi od niego nazwa algorytmu opisującego uzyskiwanie postaci schodkowej (a także zredukowanej), jak również wielu równoważnych mu rozkładów macierzy.)

- Niech $A'' \in M_{(m-1)\times n}(K)$ będzie macierzą otrzymaną z A' przez usunięcie pierwszego wiersza. Stosujemy do A'' założenie indukcyjne. Pierwsze s kolumn macierzy A'' jest zerowe i żadne operacje typu (1), (2) na wierszach tego nie zmienią.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{rs} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

- Otrzymujemy macierz, która wraz z pierwszym wierszem macierzy A' tworzy macierz A''' w postaci schodkowej. Oczywiście A''' jest uzyskana z A przez ciąg operacji typu (1) i (2). Dowód (i) jest zakończony.

Wniosek 1

- Każdy niesprzeczny układ równań liniowych ma rozwiązanie ogólne.
- Aby znaleźć rozwiązanie układu U wystarczy macierz tego układu sprowadzić do zredukowanej postaci schodkowej elementarnymi operacjami na wierszach.
- Jeśli otrzymana macierz nie zawiera wiersza postaci $0 \dots 0\,1$, to można z niej odczytać rozwiązanie ogólne układu U.
- Jeśli otrzymana macierz zawiera wiersz postaci $0 \dots 0\,1$, to układ U jest sprzeczny.

Dowód.

- Sprowadzamy macierz układu U do zredukowanej postaci schodkowej. Jeśli otrzymana macierz ma wiersz $0 \ldots 0\,1$, to odpowiadający jej układ równań zawiera równanie $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$, więc układ ten (i równoważny z nim układ U) jest sprzeczny.

- Jeśli otrzymana macierz w postaci schodkowej zredukowanej nie zawiera wiersza $0 \ldots 0\,1$, to odpowiadający jej układ równań ma (po pominięciu ewentualnych równań postaci $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$) postać

$$\begin{cases} x_{j_1} + a_{1(j_1+1)}x_{1(j_1+1)} + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ x_{j_2} + a_{2(j_2+1)}x_{1(j_2+1)} + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ x_{j_k} + a_{k(j_k+1)}x_{1(j_k+1)} + \ldots + a_{kn}x_n & = b_k \end{cases}$$

przy czym $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ oraz dla każdego $1 \leq s \leq k$ mamy $a_{ij_s} = 0$, dla wszystkich i. Stąd łatwo uzyskujemy rozwiązanie ogólne układu U.