Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 14, 18.01.2022 r.

Rozważamy układ U złożony n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (\diamondsuit).$$

Możemy go zapisać w postaci:

$$A \cdot X = B \qquad (\dagger),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Uwaga 1

Następujące warunki są równoważne:

- układ ($\diamondsuit$) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $\det A \neq 0$,
- macierz A jest odwracalna.

Gdy zachodzi dowolny z powyższych warunków, to $X = A^{-1}B$.

Uzasadnienie ostatniego zdania. Domnażamy z lewej strony przez A^{-1}:

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Powyższa uwaga pozwala sformułować **metodę macierzową rozwiązywania układów równań**, których macierz współczynników ma niezerowy wyznacznik.

Rozważmy układ równań o współczynnikach w $\mathbb{R}$ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ \qquad 2x_2 + 5x_3 & = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = 27 \end{cases}.$$

Wyznaczamy teraz macierz odwrotną do macierzy A współczynników, uzyskując:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

W rezultacie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Znamy na razie metodę obliczania macierzy odwrotnej poprzez operacje elementarne. Wprowadzimy teraz metodę opartą o wyznacznik.

Definicja 1

Załóżmy, że $A \in M_n(K)$. **Macierzą stowarzyszoną** z A definiujemy następująco:

$$\mathrm{adj}(A) = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})]^T = [(-1)^{j+1}\det(A_{ji})]$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & \dots & (-1)^{1+n}|A_{1n}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & \dots & (-1)^{2+n}|A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \dots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix}^T$$

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zauważmy też, że w powyższym przypadku:

$$\mathrm{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie

Zachodzi równość $\operatorname{adj} A \cdot A = \det(A) \cdot I_n$. W szczególności, jeśli A jest macierzą odwracalną, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$, dla $1 \le i, j \le n$. Mnożymy $\operatorname{adj}(A)$ przez A, czyli

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wymnóżmy i-ty wiersz $\operatorname{adj}(A)$ oraz j-tą kolumnę w A. Mamy:

$$(-1)^{i+1}\det A_{1i} \cdot a_{1j} + (-1)^{i+2}\det A_{2i} \cdot a_{2j} + \ldots + (-1)^{n+i}\det A_{ni} \cdot a_{nj}, \qquad (\dagger)$$

To jest $|D_{ij}|$, gdzie D_{ij} powstaje z A przez zastąpienie j-tej kolumny przez i-tą.

Twierdzenie

Zachodzi równość $\operatorname{adj} A \cdot A = \det(A) \cdot I_n$. W szczególności, jeśli A jest macierzą odwracalną, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Dowód cd. Zauważmy, że jeśli $i \neq j$, to D_{ij} ma dwie identyczne kolumny. czyli:

$$\det D_{ij} = \begin{cases} \det A, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}.$$

W rezultacie:

$$\operatorname{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix},$$

co kończy dowód.

Twierdzenie (wzory Cramera)

Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Zobaczmy dla przykładu układ równań nad $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ x - y & = 0 \end{cases}.$$

Jeśli A jest macierzą współczynników tego układu to:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, |G_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, |G_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{|G_1|}{|A|} = 1, y = \frac{|G_2|}{|A|} = 1.$$

Twierdzenie (wzory Cramera)

Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Dowód. Niech U będzie układem n równań z n niewiadomymi nad K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} .$$

Wówczas mamy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oraz:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Stąd mnożąc z lewej strony przez A^{-1} mamy:

$$A^{-1}A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ale A^{-1} ma wyrazy c_{ij} postaci: $(-1)^{j+i}\frac{\det A_{ji}}{\det A}$, mnożąc dalej dostajemy...

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det A_{1n} & (-1)^{2+n}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

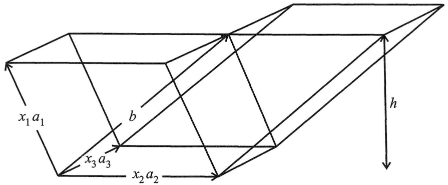
czyli jeśli G_i to macierz powstała z A przez zamianę i-tej kolumny na B, to (usuwając z G_i oraz A kolumnę i-tą i s-ty wiersz) mamy $(G_i)_{si} = A_{si}$, zatem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1}\det A_{s1} b_{s1}}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n}\det A_{sn} b_{sn}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1}\det (G_1)_{s1} b_{s1}}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n}\det (G_n)_{sn} b_{sn}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det G_1}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\det G_n}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Interpretacja geometryczna w $\mathbb{R}^3$. Niech $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; a_3] \in M_3(\mathbb{R})$ i rozważmy wektor $b \in \operatorname{lin}(a_1, a_2, a_3)$ tak, że układ $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Innymi słowy, istnieją jednoznacznie wyznaczone $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b.$$

Rozważmy równoległościany $R = R(x_1 a_1, x_2 a_2, x_3 a_3)$ oraz $R_1 = R(b, x_2 a_2, x_3 a_3)$:



Rysunek 1. Źródło: A Geometric Interpretation of Cramer's Rule, Gregory Conner and Michael Lundquist

Przyjmijmy, dla uproszczenia, że $\det A > 0$, $x_1, x_2, x_3 > 0$. Można pokazać, że

$$\det[x_1 a_1 \;\; x_2 a_2 \;\; x_3 a_3] = \det[b \;\; x_2 a_2 \;\; x_3 a_3] \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det[b \;\; a_2 \;\; a_3]}{\det[a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]}.$$

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a

Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znajdź wielomian $P_n \in \mathbb{R}[x]$ stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n+1$ z góry zadanych parami różnych punktach $x_0. \ldots, x_n$ są takie same, jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Taki wielomian P_n, jeśli istnieje, to jest jeden, bo jeśli warunki wyżej spełnia też P_n', to różnica $P_n - P_n'$ jest wielomianem stopnia $\leq n$ o $n+1$ pierwiastkach.

A taki P_n istnieje, bo... można go wyciągnąć z kapelusza! Jest to:

$$P_n(x) = f(x_0)p_0(x) + f(x_1)p_1(x) + \ldots + f(x_n)p_n(x) = \sum_{i=0} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad \text{gdzie}$$

$$p_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Z punktu widzenia algebry liniowej: niech $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ będą elementami $\mathbb{R}^2$, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$. Szukamy wielomianu stopnia n postaci:

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

że:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n & = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n & = f(x_1) \\ & \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n & = f(x_n). \end{cases}.$$

Powyższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Jego macierz współczynników to tzw. **macierz Vandermonde'a**. Policzmy jej wyznacznik:

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie

Zachodzi równość:

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0) \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n). \qquad (\spadesuit)$$

W szczególności

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Plan dowodu. Rozkładać macierz Vandermonde'a na iloczyny i korzystać z wzoru Cauchy'ego. Mamy np. (wykonując operacje elementarne na wierszach):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n & \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ {\color{red}0} & x_1 - {\color{red}x_0} & x_1^2 - {\color{red}x_0^2} & \ldots & x_1^n - {\color{red}x_0^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\color{red}0} & x_n - {\color{red}x_0} & x_n^2 - {\color{red}x_0^2} & \ldots & x_n^n - {\color{red}x_0^n} \end{pmatrix}.$$

Ostatnia macierz jest blokowo górnotrójkatna, więc:

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \ldots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Teraz przedstawimy powyższą macierz w postaci iloczynu trzech macierzy Po pierwsze wyciągamy wspólne czynniki $x_i - x_0$ z każdego wiersza i korzystając ze wzorów skróconego mnożenia mamy:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 - x_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_1^{n-1-i} x_0^i \\ 1 & x_2 + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_2^{n-1-i} x_0^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_n^{n-1-i} x_0^i \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy diagonalnej po lewej stronie to $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0)$.

A dlaczego wyznacznik macierzy po prawej to $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$?

Mamy dalej:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} x_1^{n-1-i} x_0^i \\ 1 & x_2 + x_0 & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} x_2^{n-1-i} x_0^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} x_n^{n-1-i} x_0^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 0 & 1 & x_1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A zatem pokazaliśmy, że wyznacznik Vandermonde'a $\Delta(x_0, \dots, x_n)$ równy jest w istocie iloczynowi wyznaczników trzech macierzy:

- macierzy diagonalnej o wyrazach $x_i - x_0$,
- macierzy Vandermonde'a o wyznaczniku $\Delta(x_1, \dots, x_n)$,
- macierzy górnotrójkątnej mającej jedynki na przekątnej.

A zatem z formuły Cauchy'ego mamy (♠).

Kluczowy wniosek: wyznaczenie $\Delta(x_0, \dots, x_n)$ zapewnia egzystencjalny dowód istnienia wielomianu interpolacyjnego, bez *zgadywania* wielomianów p_i.