Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 13, 11.01.2022 r.

Tematem wykładu jest wyznacznik – jedno z najbardziej znanych pojęć algebraicznych o wszechstronnych zastosowaniach. Nasze cele:

- Zdefiniować wyznacznik i określić jego związek z operacjami elementarnymi i odwracalnością macierzy.
- Podać geometryczne motywacje związane z pojęciami typu długość, pole, objętość – wyznacznik jest (w zasadzie) jedynym ich wspólnym uogólnieniem.
- Pokazać algebraiczne własności i kilka zastosowań.

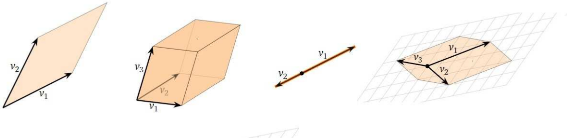
W skrócie: wyznacznik jest funkcją z $M_{n\times n}(K) \to K$, która choć nie jest liniowa (dla $n > 1$), *jest naturalnie zgodna* z wykonywaniem operacji na wierszach. Dla macierzy $M \in M_{n\times n}(K)$ o wierszach $w_1, \ldots, w_n$ stosujemy notację:

$$M = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Definicja motywacyjna – wróci na GAL II

Równoległościanem rozpiętym na wektorach $v_1, \ldots, v_n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy podzbiór

$$R(v_1, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \,|\, 0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1\}.$$

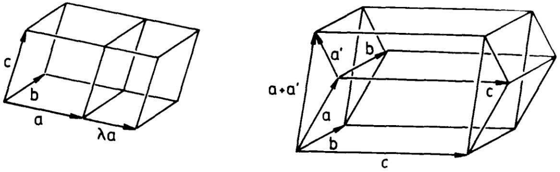


Uwaga 1 – oczywiste

Obraz równoległościanu przy przekształceniu liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ w siebie jest równoległościanem. Innymi słowy, jeśli $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ to

$$R(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) = \phi(R(v_1, \ldots, v_n)).$$

Spójrzmy na ilustrację równoległościanów $R(\lambda \cdot a, b, c)$ oraz $R(a + a', b, c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ oraz $\lambda > 0$



Rysunek 2. Źródło: K. Spindler, Abstract Algebra with Applications

Stosując znane fakty z geometrii szkolnej można pokazać, że

- *objętość* $R(\lambda \cdot a, b, c)$ równa jest λ razy *objętość* $R(a, b, c)$,
- *objętość* $R(a + a', b, c)$ to suma *objętości* $R(a, b, c)$ oraz $R(a', b, c)$.

Jakie własności mają funkcje z $M_{n\times n}(K) \to K$ zachowujące się jak wyżej?

Definicja 2

Dla każdego całkowitego $n \geq 1$ zbiór macierzy $M_{n\times n}(K)$ nazywamy zbiorem **macierzy kwadratowych rozmiaru *n*** i oznaczamy $M_n(K)$.

Definicja 3

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Dla $1 \leq i, j \leq n$ określamy macierze $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ otrzymane z A przez skreślenie odpowiednio i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład: dla macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

mamy:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Określimy rekurencyjne wyznacznik jako funkcję $\det : M_n(K) \to K$. Potrzebujemy:

- wyrazów macierzy w pierwszej kolumnie: $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$,
- wyznaczników macierzy rozmiaru $n-1$ postaci $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}$.

Będzie to zatem definicja rekurencyjna. Intuicja – objętość liczymy ze wzorów typu: pole podstawy razy wysokość, czyli np. wyznaczanie szkolnej objętości trójwymiarowej wymaga znajomości objętości niżej-wymiarowych.

Definicja 4 – wyznacznik (rozwinięcie Laplace'a wzgl. pierwszej kolumny)

- Dla $n = 1$ kładziemy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det(A) = a$, dla $A = [a]$.
- Dla $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ znając $\det : M_{n-1}(K) \to K$:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.$$

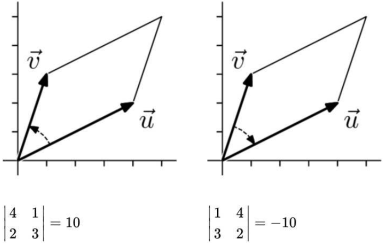
Czasem zamiast pisać $\det A$ piszemy $|A|$.

Przykłady dla małych n.

- Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mamy $A_{11} = [2], A_{21} = [4]$, czyli:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det A_{21} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10.$$

Ujemna objętość? Ma to sens w kontekście tzw. *pola skierowanego*. Więcej wyjaśnień pojawi się wkrótce.



Rysunek 4. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

Przykłady dla małych n.

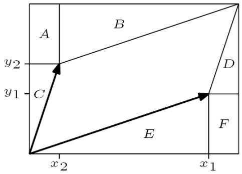
- Ogólnie dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

  mamy

$$|A| = x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

Osoby szukające związku powyższej formuły z polem zachęcam do porównania jej z poniższym rysunkiem (jak wygląda uogólnienie na objętość?):



Rysunek 5. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

Przykłady dla małych n.

- Dla

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

  mamy

$$a_{11} = 4, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad |A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

  czyli

$$\det A = 4 \cdot 11 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 44.$$

Patrz: równoległościan rozpięty przez wektory $(4, 0, 0)$, $(0, 2, -1)$, $(0, 5, 3)$ – liczenie wyznacznika pokrywa się (co do znaku) z praktyką liczenia objętości przez iloczyn pola podstawy i wysokości.

A jaki jest wynik gdy zamiast $\mathbb{R}$ weźmiemy $\mathbb{Z}_{11}$?

Przykłady dla małych n.

- Ogólnie dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

wyznacznik A równy jest z definicji:

$$(-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Metoda Sarrusa (tylko dla macierzy rozmiaru 3×3):

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Definicja 5

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Zbiór wyrazów $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ nazywamy **przekątną** lub **diagonalą** macierzy A. Powiemy, że A jest:

- **górnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i > j$
  (czyli *pod przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- **dolnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $j > i$
  (czyli *nad przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- **diagonalna**, jeśli jest jednocześnie górnotrójkątna i dolnotrójkątna.

Geometrycznie mówiąc macierz diagonalna o niezerowych wyrazach na diagonali reprezentuje równoległościan o prostopadłych krawędziach. Sugeruje to, że wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem wyrazów na jej przekątnej. Tak istotnie jest, i to nie tylko dla macierzy diagonalnej.

Uwaga 2

Jeśli $A \in M_n(K)$ jest macierzą górnotrójkątną (na przykład: macierzą w postaci schodkowej), to jej wyznacznik równy jest iloczynowi wyrazów na przekątnej.

Dowodzimy tezę przez indukcję. Dla $n = 1$ wynika ona wprost z definicji.

- Weźmy zatem macierz $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ oraz zauważmy, że $a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$.
- Z definicji wyznacznika mamy

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11}.$$

- Macierz A_{11} powstaje z A przez usunięcie pierwszego wiersza i kolumny. Skoro A jest górnotrójkątna, to również A_{11} jest górnotrójkątna.
- A zatem z założenia indukcyjnego $\det A_{11} = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Czy możliwe jest obliczenie wyznacznika za pomocą rozwinięcia Laplace'a względem innych kolumn, albo nawet wierszy? Innymi słowy, czy mając macierz $A \in M_n(K)$ oraz znając:

- wyrazy macierzy w i-tym wierszu: $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ (odp. j-tej kolumnie $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$)
- wyznaczniki macierzy rozmiaru $n-1$ postaci $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ (odp. $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$)

możemy policzyć wyznacznik? Otóż tak.

* * *

Celem wykładu jest pokazanie formuły:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \qquad (\dagger)$$

Twierdzenie 1 – pierwszy cel. Operacje elementarne a wyznacznik.

Rozważmy funkcję $\det : M_n(K) \to K$. Wówczas

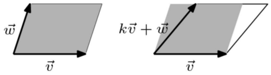
(1) dodanie jednego wiersza do drugiego nie zmienia wyznacznika[a]: jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie wartości jednego wiersza do innego, to $\det(A') = \det(A)$,

(2) przestawienie wierszy zmienia znak wyznacznika, tzn. jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch wierszy, to $\det(A') = -\det(A)$.

(3) pomnożenie wiersza przez skalar implikuje mnożenie wyznacznika przez ten skalar: jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez pomnożenie pewnego wiersza przez c, to $\det(A') = c \cdot \det(A)$.

---

[a] Interpretacja geometryczna punktu pierwszego dla $n = 2$:



Rysunek 6. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

Ważne zastosowanie – algorytm liczenia $|A|$ poprzez „schodkowanie":

1. Sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej A' operacjami typu (1) i (2).
2. Wyznacznik A' to po prostu iloczyn wyrazów na przekątnej.
3. Mamy też $|A| = (-1)^k \cdot |A'|$, gdzie k oznacza liczbę operacji typu (2) użytych przy sprowadzaniu A do A'.

Przykład. Jeśli $* = (n-1) - 1 - 2 - 3 - \cdots - (n-2)$, to:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{vmatrix}$$

Definicja 6

Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest **jednorodna względem k-tego wiersza**, jeśli dla kazdej macierzy $A \in M_n(K)$ oraz dla każdego $c \in K$

$$f(A') = c \cdot f(A),$$

gdzie A' powstaje z A przez pomnożenie k-tego wiersza przez c. Innymi słowy, jeśli $w_1, \ldots, w_n \in K^n$ są wierszami macierzy A, to

$$f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ cw_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = c \cdot f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Definicja 7

Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest **addytywna względem k-tego wiersza**, jeśli dla każdej trójki macierzy $A, B, C \in M_n(K)$ takiej, że:

- k-ty wiersz macierzy C to suma k-tego wiersza A oraz k-tego wiersza B,
- l-te macierzy A, B, C są identyczne, dla $l \neq k$.

zachodzi

$$f(C) = f(A) + f(B).$$

Innymi słowy, dla dowolnych $w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k', w_k'', w_{k+1}, \ldots, w_n \in K^n$ mamy:

$$f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k'} + w_k'' \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k'} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k'' \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 2

Funkcja $\det : M_n(K) \to K$ jest jednorodna i addytywna względem każdego wiersza.

Dowód jednorodności. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ – jasne. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mnożymy k-ty wiersz A przez $c \in K$ dostając B. Wówczas:

- $B_{k1} = A_{k1}$,
- dla $j \neq k$ każda z macierzy B_{j1} powstaje z A_{j1} przez pomnożenie pewnego wiersza przez stałą. Z założenia indukcyjnego $\det B_{j1} = c \det A_{j1}$.

Zatem:

$$\det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} c a_{k1} \det B_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det B_{n1} =$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} c \det A_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} c a_{k1} \det A_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} c \det A_{n1} =$$
$$= c \cdot \det A.$$

Twierdzenie 2

Funkcja $\det : M_n(K) \to K$ jest jednorodna i addytywna względem każdego wiersza.

Zauważmy, że:

- $Z_{k1} = Y_{k1} = X_{k1}$,
- dla $j \neq k$ macierze Z_{j1}, Y_{j1}, X_{j1} różnią się tylko k-tym wierszem, przy czym k-ty wiersz Z_{j1} jest sumą k-tych wierszy Y_{j1} oraz X_{j1}. Z założenia indukcyjnego mamy zatem
$$\det Z_{j1} = \det X_{j1} + \det Y_{j1}.$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\det Z &= (-1)^{1+1} a_{11} \det Z_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} (x_{k1} + y_{k1}) \det Z_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det Z_{n1} = \\ &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{j1} (\det X_{j1} + \det Y_{j1}) + (-1)^{k+1} x_{k1} \det X_{k1} + y_{k1} \det Y_{k1} = \\ &= \det Y + \det Z\end{aligned}$$

Wniosek 1

Jeśli $A \in M_n(K)$ oraz A ma zerowy wiersz, to $\det(A) = 0$.

Uwaga 4

Jeśli dwa sąsiednie wiersze macierzy $A \in M_n(K)$ są identyczne, dla $n \geq 2$, wówczas $\det A = 0$.

Uwaga 4

Jeśli dwa sąsiednie wiersze macierzy $A \in M_n(K)$ są identyczne, dla $n \geq 2$, wówczas $\det A = 0$.

Dowód: indukcja ze względu na n. Dla $n = 2$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że $n > 2$ oraz identyczne są i-ty oraz $i+1$-ty wiersz macierzy $A = [a_{ij}]$, czyli dla $1 \leq k \leq n$ mamy $a_{ik} = a_{i+1,k}$.

Zauważmy, że:

- $A_{i1} = A_{i+1,1}$
- dla $k \neq i, i+1$ macierze A_{k1} mają dwa identyczne wiersze, a więc z zał. indukcyjnego $\det A_{k1} = 0$.

Zatem $\det A$ równy jest:

$$\sum_{k \neq i, i+1} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+1+1} a_{i+1,1} \det A_{i+1,1} = 0.$$

Twierdzenie 3 – główny wynik

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\phi : M_n(K) \to K$, taka, że:

1. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja ϕ jest jednorodna względem k-tego wiersza.
2. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja ϕ jest addytywna względem k-tego wiersza.
3. $\phi(A) = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.
4. $\phi(I_n) = 1$.

Z naszych dotychczasowych rozważań wynika, że funkcja $\det$ spełnia powyższe warunki. Twierdzimy, że żadnej innej funkcji spełniającej te warunki nie ma. Warunek (3) to pewne uproszczenie oczekiwania, że objętość równa jest zero dla równoległościanów rozpiętych na liniowo zależnych układach wektorów. Warunek (4) mówi w skrócie, że objętość *kostki jednostkowej* (po jej wyborze) wynosi 1.

Lemat 1

Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ powstaje z macierzy C przez zamianę dwóch sąsiednich wierszy, to

$$\phi(C) = -\phi(C').$$

Dowód. Niech wiersze macierzy C to $w_1, \ldots, w_n$. Niech C' powstaje z C przez zamianę wiersza k-tego i $k+1$-wszego. Na mocy własności (2) i (3) funkcji ϕ:

$$\underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k + w_{k+1} \\ w_k + w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} = \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(C)} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(C')}$$

Lemat 2 - jasne

Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli macierz $C \in M_n(K)$ ma dwa identyczne wiersze, to $\phi(C) = 0$.

Lemat 3

Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\phi(B) = \phi(A)$.

Lemat 3

Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\phi(B) = \phi(A)$.

Schemat uzasadnienia, korzystający z poprzednich wyników:

$$\underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l + aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(B)} = \phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(A)} + a \cdot \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0}.$$

Lemat 4 - wniosek z poprzednich, czyli też Twierdzenie 1

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech M będzie macierzą operacji elementarnej oraz $A \in M_n(K)$. Wówczas:

$$\det MA = \begin{cases} \det A, & \text{dla M dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -\det A, & \text{dla M zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c \cdot \det A, & \text{dla M mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W szczególności dla $A = I_n$ mamy

$$\det M = \begin{cases} 1, & \text{dla M dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -1, & \text{dla M zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c, & \text{dla M mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W każdym z opisanych przypadków zachodzi równość $\det MA = \det M \cdot \det A$. $(\diamondsuit)$

Lemat 5 - fundamentalna własność wyznacznika

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej $A \in M_n(K)$ równoważne są warunki:

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A jest odwracalna.

Dowód. Zacznijmy od przypomnienia, że jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

Stosując wiele razy Lemat 4 i formułę $(\diamondsuit)$ mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

Lemat 5 - fundamentalna własność wyznacznika

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej $A \in M_n(K)$ równoważne są warunki:

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A jest odwracalna.

Dowód cd. W rezultacie $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$ (bo $\det M_i$ są zawsze niezerowe). Skoro A jest kwadratowa, to są dwie możliwości:

- $A' = I$,
- A' ma zerowy wiersz.

W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$. W rezultacie:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I \Leftrightarrow r(A) = n.$$

Lemat 6 - wzór Cauchy'ego

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas: $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Przypadek 1. Macierz AB nie jest odwracalna.

- Zgodnie z Lematem 5 mamy
$$\det AB = 0.$$
- Oznacza to, że
$$\det A = 0 \quad \text{lub} \quad \det B = 0.$$
Inaczej na mocy Lematu 5 macierze A, B byłyby odwracalne, a z nimi i AB, bo jak wiadomo
$$(AB) \cdot B^{-1}A^{-1} = I.$$
- Zatem
$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0.$$

Lemat 6 - wzór Cauchy'ego

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas: $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Przypadek 2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.

- Zgodnie z Lematem 5 $r(AB) = n$, a wiemy z wcześniejszych wykładów, że to oznacza, że $r(A) = n$ oraz $r(B) = n$ (mamy np. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$).
- Z Lematu 5 mamy $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$, więc $\det AB \neq 0$. W szczególności postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I.
- Mówiąc inaczej: istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ oraz $N_1, \ldots, N_t$ takie, że

$$I = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A, \quad I = N_1 N_2 N_3 \ldots N_t B.$$

Lemat 6 - wzór Cauchy'ego

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas: $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Przypadek 2. Załóżmy, że AB jest odwracalna. (cd.)

- Mówiąc inaczej: istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ oraz $N_1, \ldots, N_t$ takie, że
$$I = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A, \quad I = N_1 N_2 N_3 \ldots N_t B.$$
- Zatem $A = M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}, \quad B = N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1}$. Ale M_i^{-1} oraz N_j^{-1} to macierze operacji elementarnych, więc z Lematu 4, a dokładniej formuły ($\diamondsuit$):
$$\begin{aligned}\det AB &= \det {\color{red}M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}} {\color{blue}N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1}} = \\ &= \det {\color{red}M_s^{-1}} \det {\color{red}M_{s-1}^{-1}} \ldots \det {\color{red}M_1^{-1}} \det {\color{blue}N_t^{-1}} \det N_{t-1}^{-1} \ldots \det {\color{blue}N_1^{-1}} = \\ &= \det M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1} \det N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1} = \det A \det B.\end{aligned}$$

Pozostało zakończyć uzasadnienie Twierdzenia 3. Mianowicie twierdzimy, że wartość funkcji $\det$ spełniającej $(1) - (4)$ jest jednoznacznie wyznaczona, dla każdej macierzy $A \in M_n(K)$. Rzeczywiście:

- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$, zgodnie z Lematem 5.
- Jeśli A jest odwracalna to algorytm Gaussa podaje jednoznaczny, najkrótszy możliwy ciąg operacji elementarnych pozwalających na sprowadzenie A do postaci zredukowanej I. Niech macierze tych operacji to $M_1, \dots, M_s$. Na mocy wzoru Cauchy'ego:

  $$1 = \det I = \det M_s \det M_{s-1} \dots \det M_1 \det A.$$

  Zatem gdy A jest odwracalna, to

  $$\det A = (\det M_s \det M_{s-1} \dots \det M_1)^{-1},$$

  gdzie $M_1, \dots, M_s$ jest jednoznacznie wyznaczonym ciągiem macierzy operacji elementarnych. Skoro znamy $\det M_i$, to $\det A$ jest wyznaczona jednoznacznie, co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 5

Dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

- Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T) = r(A) < n$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.
- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych
$$A = M_1 M_2 \ldots M_s.$$
Zatem zgodnie ze wzorem $(XY)^T = Y^T X^T$ mamy: $A^T = M_s^T M_{s-1}^T \ldots M_1^T$. Łatwo sprawdzić, że dla każdej macierzy operacji elementarnej M mamy $\det M = \det M^T$. Rzeczywiście, dla macierzy operacji typu (2) i (3) po prostu mamy $M = M^T$. Co do macierzy operacji (1) to przecież M^T jest również macierzą operacji typu (1), a wszystkie te macierze mają wyznacznik równy 1, zgodnie z Lematem 4. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego:
$$\det A = \det M_1 \det M_2 \ldots \det M_s = \det M_s^T \det M_{s-1}^T \ldots \det M_1^T = \det A^T.$$

Pozostało uzasadnić wzór (†) mówiący, że obliczanie wyznacznika za pomocą rozwinięcia względem dowolnego wiersza i dowolnej kolumny daje ten sam wynik.

- Analogicznie jak w dowodach Uwagi 2, Twierdzenia 2 oraz Uwagi 4 pokazujemy, że funkcje postaci $d_k : M_n(K) \to K$ określone przez rozwinięcie względem s-tej kolumny spełniają warunki (1)-(4), a zatem zgodnie z Twierdzeniem 3, funkcje z $M_n(K) \to K$ zadające rozwinięcia względem poszczególnych kolumn są równe.
- Korzystając z tego, że $\det A = \det A^T$ zauważamy, że funkcja $w_k : M_n(K) \to K$ określona przez rozwinięcie względem k-tego wiersza równa jest funkcji określonej przez rozwinięcie względem k-tej kolumny. Istotnie, z założenia:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})^T$$

  Wyrazy $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ to wyrazy i-tej kolumny macierzy A^T, zaś $(A_{ik})^T$ powstaje z usunięcia z A^T k-tego wiersza i n-tej kolumny. A zatem po prawej stronie znajduje się $\det A^T = \det A$.

Zobaczmy prosty przykład zastosowania pokazanych własności. Niech $B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będą postaci

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 17 \\ 13 & 11 & -7 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obliczymy

$$\det(B^{-1}CB^{T}C)$$

wiedząc, że B jest odwracalna. Ze wzoru Sarrusa otrzymujemy

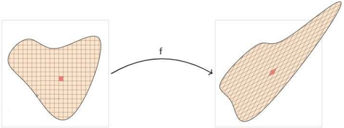
$$\det(C) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Ponieważ wyznacznik odwrotności to odwrotność wyznacznika i transpozycja nie zmienia wyznacznika, ze wzoru Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} \det(B^{-1}CB^{T}C) &= \det(B^{-1})\det(C)\det(B^{T})\det(C) = \\ &= \det(C)^2\det(B)^{-1}\det(B) = \det(C)^2 = \\ &= 576. \end{aligned}$$

Uzasadniliśmy zatem, że wyznacznik zachowuje się – przynajmniej dla równoległościanów – jak funkcje znane ze szkoły jako długość, pole czy objętość.

Odnotujmy na koniec jeszcze jedną ważną intuicję: w przyszłym semestrze okaże się, że dla danego przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stosunek *objętości* równoległościanu i jego obrazu jest niezależny od wyboru równoległościanu. Równy jest on natomiast co do modułu wyznacznikowi macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.



Rysunek 3. Miary nieliniowych zbiorów można przybliżać miarami (prawie) rozłącznych sum równoległościanów, a własności porządnych funkcji wielu zmiennych można zrozumieć przybliżając je lokalnie funkcjami liniowymi (afinicznymi). Na GALu poznajemy podstawowe „klocki"i ich własności. Na drugim roku na analizie i topologii będą Państwo się uczyć co to znaczy „prawie", „miara", „przybliżać", „porządnych", „lokalnie". A na algebrze abstrakcyjnej będą... bardziej skomplikowane „klocki".

Definicja 8

Niech $A \in M_n(K)$ oraz $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, dla pewnych całkowitych $n_1, \ldots, n_k, k > 0$. Niech macierz $D_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$, zwana dalej **blokiem** A względem podziału $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$), powstaje z macierzy A przez:

- usunięcie wszystkich wierszy poza wierszami o indeksach $n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i$,
- usunięcie wszystkich kolumn poza kolumnami o indeksach $n_1 + \ldots + n_{j-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{j-1} + n_j$,

przy czym $n_0 = 0$. Wówczas mówimy, że macierz A jest w **postaci blokowej** (D_{ij}) (wzgl. rozbicia $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$), co oznaczamy w następujący sposób:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1k} \\ \hline D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2k} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline D_{k1} & D_{k2} & \ldots & D_{kk} \end{array}\right) \quad \text{lub prościej} \quad A = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1k} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k1} & D_{k2} & \ldots & D_{kk} \end{pmatrix}.$$

Definicja 8 cd.

Niech $A \in M_n(K)$ oraz $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, dla pewnych całkowitych $n_1, \ldots, n_k, k > 0$ oraz niech (D_{ij}) będzie postacią blokową A względem tego podziału. Bloki D_{ii} nazywamy blokami diagonalnymi. Co więcej, A nazywamy:

- **blokowo górnotrójkątną**, jeśli istnieje rozbicie $n = n_1 + \ldots + n_k$ na dodatnie składniki takie, że postać blokowa (D_{ij}) macierzy A względem tego rozbicia spełnia $D_{ij} = 0$, dla $i > j$,
- **blokowo dolnotrójkątną**, jeśli istnieje rozbicie $n = n_1 + \ldots + n_k$ na dodatnie składniki takie, że postać blokowa (D_{ij}) macierzy A względem tego rozbicia spełnia $D_{ij} = 0$, dla $i < j$,
- **blokowo diagonalną**, jeśli jest jednocześnie blokowo górnotrójkątna i blokowo-dolnotrójkątna, dla pewnego podziału $n = n_1 + \ldots + n_k$.

Uwaga

Niech A będzie macierzą blokowo górnotrójkątną lub blokowo dolnotrójkątną o blokach diagonalnych $D_{11}, \ldots, D_{kk}$. Wówczas

$$\det A = \det D_{11} \cdot \det D_{22} \cdot \ldots \det D_{kk}.$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę dla macierzy rozmiaru $n \times n$ postaci:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Istotnie:

- Macierz o $k > 1$ blokach diagonalnych $D_{11}, \ldots, D_{kk}$ traktować można jako macierz o dwóch blokach diagonalnych, więc można rozumować indukcyjnie.
- Wyznacznik nie zmienia się przy transponowaniu, a transpozycja macierzy blokowo górnotrójkątnej jest macierzą blokowo dolnotrójkątną.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę dla macierzy rozmiaru $n \times n$ postaci:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

- Indukcja ze względu na rozmiar n macierzy X. Dla $n = 2$ i macierzy o czterech blokach rozmiarów 1×1 – jasne.
- Niech $n > 2$. Niech pierwsza kolumna macierzy A ma wyrazy $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}$. Rozwijamy względem pierwszej kolumny, otrzymując
$$\det X = (-1)^{1+1} a_{11} \det X_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} a_{k1} \det X_{k1}.$$
- Macierze X_{i1} są, dla $1 \leq i \leq k$ macierzami blokowo-górnotrójkątnymi postaci
$$X_{i1} = \begin{bmatrix} A_{i1} & * \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$
A zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym $\det X_{i1} = \det A_{i1} \cdot \det D$, co daje:
$\det X = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} \cdot \det D + \ldots + (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} \cdot \det D = \det A \cdot \det D.$