Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 12, 22.12.2021 r.

Gdy rozważamy złożenia przekształceń liniowych, zapis „funkcyjny" jest często niezmiernie kłopotliwy. Przekształcenia (i obiekty, które one ze sobą wiążą) reprezentujemy często przy pomocy **diagramów**.

Przykład: złożenie przekształceń liniowych

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

W diagramie zawrzeć można warunki charakteryzujące ważne przekształcenia liniowe. Na przykład warunek sformułowany w następujący sposób – spośród przekształceń liniowych $f : V \to W$ monomorfizmy są jedynymi przekształceniami takimi, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $g : W \to V$, że:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V"'] & W \arrow[d, dashed, "g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Definicja

Diagramem przekształceń liniowych nazywać będziemy graf skierowany, którego wierzchołki etykietowane są przestrzeniami liniowymi (lub nie – jeśli mowa o dowolnych przestrzeniach), a krawędzie – przekształceniami liniowymi pomiędzy nimi. Podstawowym diagramem jest **ciąg**, czyli diagram postaci:

$$V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \quad (\star)$$

Przykład:

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "f_1"] & U_2 \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "f_2"] & U_3 \arrow[r, "r_3"] \arrow[d, red, "f_3"] & U_4 \arrow[r, "r_4"] \arrow[d, "f_4"] & U_5 \arrow[d, "f_5"] \\
V_1 \arrow[r, "s_1"] & V_2 \arrow[r, "s_2"] & V_3 \arrow[r, "s_3"] & V_4 \arrow[r, "s_4"] & V_5
\end{tikzcd}$$

Złożenie $\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_1$ nazwiemy **złożeniem** wzdłuż ciągu ($\star$). Powiemy, że dowolny diagram przekształceń jest **przemienny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków V, W tego diagramu, złożenia wzdłuż dowolnych dwóch ciągów tego diagramu o początkach w V i końcach w W są sobie równe (jako przekształcenia).

Dla przykładu poniższy diagram jest przemienny, o ile $\phi_2 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \psi_1$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & B \arrow[d, "\phi_2"] \\ C \arrow[r, "\psi_2"] & D \end{tikzcd}$$

Diagramy, zwłaszcza ciągi przekształceń, trójkąty i kwadraty – ale i kilka innych – to ważne narzędzia w definiowaniu nowych przekształceń (i nie tylko) przy pomocy starych. Przekonamy się o tym wkrótce.

Przykład własności uniwersalnej (na razie nie definiujemy czym jest to pojęcie).

Charakteryzacja *zewnętrzna* sumy prostej podprzestrzeni

Niech X będzie przestrzenią liniową wraz z podprzestrzeniami X_1, X_2 oraz epimorfizmami

$$\pi_1 : X \to X_1, \quad \pi_2 : X \to X_2.$$

Wówczas $X = X_1 \oplus X_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej przestrzeni liniowej Y oraz przekształceń liniowych $f_1 : Y \to X_1$ oraz $f_2 : Y \to X_2$ istnieje **dokładnie jedno przekształcenie** $f : Y \to X$ takie, że przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Definicja

Funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na V nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do V.

Przykłady:

- $f \in (\mathbb{Q}^3)^*$ zadany wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$,

  Wiemy już z wcześniejszych wykładów, że dla każdego elementu $\phi \in (K^n)^*$ istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że ϕ zadana jest wzorem

  $$\phi((x_1, \ldots, x_n)) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n.$$

Definicja

Funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na V nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do V.

Przykłady:

- Niech X będzie niepustym zbiorem, K – ciałem oraz $F(X, K)$ – przestrzenią funkcji z W do K. Niech $x_0 \in X$. Wówczas odwzorowanie $\psi_{x_0} : F(X, K) \to K$ zadane wzorem:

  $$\psi_{x_0}(f) = f(x_0)$$

  jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $F(X, K)$. Ten niezwykle istotny funkcjonał ψ_{x_0} nazywany **ewaluacją w punkcie** x_0.

Idea dualności. Rozważmy następujące zdania.

- „Punkty A, B leżą na prostej c".
- „Proste a, b przecinają się w punkcie C".

W języku algebraicznym:

- „Ciągi (a, b), (a', b') spełniają równanie liniowe C postaci $cx_1 + dx_2 = 0$".
- „Równania
$$ax_1 + bx_2 = 0, \quad a'x_1 + b'x_2 = 0$$
spełnione są jednocześnie przez punkt (c, d)".

Obydwa zdania napisane wyżej wyrażają się dokładnie tymi samymi formułami:

$$ac + bd = 0, \quad a'c + b'd = 0.$$

które można intepretować tak, że funkcjonały $f_1 = ax_1 + bx_2, f_2 = a'x_1 + b'x_2$ zerują się na (c, d) lub tak, że funkcjonał $f = cx_1 + dx_2$ zeruje się na $(a, b), (a', b)$.

Uwaga

Jeśli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, to $V \simeq V^*$

Dowód. Niech $\dim V = n$. Wówczas $V^* = L(V, K)$ jest również wymiaru n, jako przestrzeń izomorficzna z $M_{1\times n}(K)$. Dwie przestrzenie tego samego, skończonego wymiaru, są izomorficzne.

Fakt ten nie jest prawdziwy dla żadnej przestrzeni nieskończonego wymiaru. Można (nietrudne) pokazać np., że $K[x]^* \simeq K[[x]]$, gdzie $K[[x]]$ jest zbiorem nieskończonych sum formalnych postaci:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

gdzie $a_i \in K$. Przestrzeń $K[[x]]$ nazywamy **szeregami formalnymi** nad K.

Idea $\phi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)x^i$ to izomorfizm $K[x]^*$ oraz $K[[x]]$.

Uwaga

Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V i niech $f_i : V \to K$ będzie jedynym funkcjonałem liniowym takim, że:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases} \qquad (\star)$$

Wówczas:

(a) $v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n$, czyli f_i przyporządkowuje wektorowi jego i-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$,

(b) dla dowolnego $f \in V^*$ mamy $f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n$, i jest to przedstawienie jednoznaczne,

(c) układ funkcjonałów $\mathcal{A}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V^* i wartość funkcjonału $f \in V^*$ na wektorze v_j jest j-tą współrzędną tego funkcjonału w bazie $\mathcal{A}^*$.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n,$$

czyli f_i przyporządkowuje wektorowi jego i-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$.

Przykład. Dla bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ postaci

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0)$$

układ funkcjonałów f_i określony warunkami wyżej istnieje i ma postać:

$$f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_3, \quad f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_2 - x_3, \quad f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 - x_2.$$

Na przykład dla $\alpha = (10, 5, 2)$ otrzymujemy:

$f_1(\alpha) = 2, f_2(\alpha) = 3, f_3(\alpha) = 5$ oraz $(10, 5, 2) = 2(1, 1, 1) + 3(1, 1, 0) + 5(1, 0, 0).$

Niech
$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$
Wówczas
$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n,$$
czyli f_i przyporządkowuje wektorowi jego i-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$.

Dowód:

- Jeśli $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, to:
$$\begin{aligned} f_i(v) &= a_1 f_i(v_1) + a_2 f_i(v_2) + \ldots + a_n f_i(v_n) = \\ &= a_i f_i(v_i) = \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } i = j \\ 0, \text{ jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V^*

Dowód:

- Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

  $$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$

  przy czym 0 po prawej stronie intepretujemy jako funkcjonał zerowy!
- A zatem dla każdego $v \in V$ mamy $(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v) = 0$.
- Z drugiej strony biorąc element v_i bazy $\mathcal{A}$ mamy:

  $$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v_i) = a_1 f_1(v_i) + \ldots + a_n f_n(v_i) = a_i.$$

- A zatem $a_i = 0$, dla każdego $1 \leq i \leq n$. A zatem $(f_1, \ldots, f_n)$ jest układem liniowo niezależnym.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V^*

Dowód cd.:

- Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

- Aby stwierdzić czy dwa przekształcenia są identyczne wystarczy to sprawdzić na dowolnej bazie V, na przykład na $(v_1, \ldots, v_n)$.
- Wówczas rzeczywiście:

$$(f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n)(v_i) = f(v_1)f_1(v_i) + \ldots + f(v_n)f_n(v_i) = f(v_i) \cdot 1.$$

- A zatem układ $(f_1, \ldots, f_n)$ rozpina V^*. Pokazaliśmy więc (b), a i też (c).

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \dots, f_n)$ jest bazą V^* i dla dowolnego $f \in V^*$ mamy

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n,$$

i jest to przedstawienie jednoznaczne.

Przykład. Współrzędne funkcjonału $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$, gdzie

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 - 9x_2 + 5x_3$$

w bazie sprzężonej do

$$\mathcal{A} = ((1,1,1), (5,1,1), (1,1,3))$$

wynoszą:

$$\phi((1,1,1)) = -2, \quad \phi((5,1,1) = 6, \quad \phi((1,1,3)) = 8.$$

Definicja

Bazę $\mathcal{A}^*$ zdefiniowaną w uwadze wzorem $(\star)$ nazywamy **bazą dualną** do bazy $\mathcal{A}$. Bazą sprzężoną do bazy standardowej przestrzeni K^n jest baza złożona z funkcjonałów postaci $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, dla $1 \leq i \leq n$. Bazę tą oznaczamy st^*.

Przykład. Niech $\alpha_1 = (1, 3), \alpha_2 = (2, 7)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Weźmy

$$\alpha_1^*(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2, \quad \alpha_2^*(x_1, x_2) = -3x_1 + 1x_2.$$

Wówczas, jak we wzorze $(\star)$ mamy:

$$\alpha_1^*(\alpha_1) = 1, \quad \alpha_1^*(\alpha_2) = 0, \quad \alpha_2^*(\alpha_1) = 0, \quad \alpha_2^*(\alpha_2) = 1.$$

Zauważmy, że jeśli wpiszemy współczynniki funkcjonałów w macierz (w kolumny), a wektory z wyjściowej bazy wpiszemy w wiersze macierzy, dostaniemy zależność:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Problem wyznaczania bazy dualnej jest problemem rozwiązania układu równań danego warunkami z $(\star)$.

Definicja

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. **Przekształceniem sprzężonym** do ϕ nazywamy przekształcenie $\phi^* : W^* \to V^*$ określone wzorem

$$\phi^*(g) = g \circ \phi.$$

Innymi słowy jest to takie przekształcenie, które bierze funkcjonał g z W^* i przeprowadza go na funkcjonał $\phi^*(g) : V \to K$ tak, że następujący diagram jest przemienny dla każdego $g \in W^*$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, dashed, "\phi^*(g)"] \arrow[dr, "\phi"'] & & K \\ & W \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Przykład przekształcenia sprzężonego. Rozważmy $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem:

$$\psi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 - 2x_3).$$

Wówczas dla funkcjonału $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanego wzorem:

$$f((y_1, y_2)) = 3y_1 - 2y_2$$

funkcjonał $\psi^*(f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadany wzorem:

$$\begin{aligned}
\psi^*(f)((x_1, x_2, x_3)) &= (f \circ \psi)((x_1, x_2, x_3)) = f(\psi((x_1, x_2, x_3)) = \\
&= f((2x_1 + 3x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 - 2x_3)) = \\
&= 3(2x_1 + 3x_2 + x_3) - 2(5x_1 - x_2 - 2x_3) = \\
&= -4x_1 + 11x_2 + 7x_3.
\end{aligned}$$

A jak wygląda wzór przekształcenia ψ^*? Jak je zapisać? Można np.:

$$\psi^*(y_1\epsilon_1^* + y_2\epsilon_2^*) = a_1\epsilon_1^* + a_2\epsilon_2^* + a_3\epsilon_3^*$$

Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V oraz W. Niech $\phi : V \to W$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą V oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą W.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.
- Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że i-ty wyraz j tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest i-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.
- Z definicji bazy dualnej $\mathcal{B}^*$ wiadomo, że ta współrzędna wynosi $a_{ij} = w_i^*(\phi(v_j))$. Po transpozycji macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ wyraz a_{ij} staje się i-tym wyrazem j-tego wiersza macierzy transponowanej.
- Odpowiedni wyraz b_{ji} macierzy $M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ jest j-tą współrzędną i-tej kolumny tej macierzy, a więc to j-ta współrzędna wektora $\phi^*(w_i^*)$ w bazie $\mathcal{A}^*$.
- Ale $\phi^*(w_i^*) = w_i^* \circ \phi$, a jego j-ta współrzędna w bazie $\mathcal{A}^*$ to $w_i^*(\phi(v_j))$

Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy ϕ^* jest epimorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy ϕ^* jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- ϕ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- ϕ^* jest epimorfizmem.

oraz równoważności:

- ϕ jest epimorfizmem,
- $r(\phi) = \dim W$,
- $r(\phi^*) = \dim W^*$,
- ϕ^* jest monomorfizmem.

Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału ϕ w wektorze v jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód (szkic):

- Oczywiście e jest przekształceniem liniowym.
- Mamy $\dim V = \dim V^{**}$, więc wystarczy pokazać, że e jest monomorfizmem.
- A zatem wektor v ma tę własność, że $e_v(\phi) = 0$, dla każdego ϕ.
- Oznacza to, że $\phi(v) = 0$, dla każdego $\phi \in V^*$. Stąd $v = 0$.

Gdy $\dim V < \infty$, to żaden izomorfizm $i : V \to V^*$ nie jest naturalny, tzn. nie jest zawsze prawdą, że dla każdego izomorfizmu $\lambda : V \to V$ poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V^* \\ {\scriptstyle\lambda}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\lambda^*} \\ V & \xrightarrow[i]{} & V^* \end{array}$$

Ewaluacja $e_v : V \not\simeq V^{**}$ określona wyżej spełnia ten warunek, tzn. dla dowolnego izomorfizmu $\lambda : V \to V$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V^{**} \\ {\scriptstyle\lambda}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\lambda^{**}} \\ V & \xrightarrow[i]{} & V^{**} \end{array}$$

Gdy poznamy język teorii kategorii zrozumiemy trochę lepiej na czym polegają te obserwacje. Zgromadziliśmy niemal wszystkie pojęcia niezbędne do rozpoczęcia badania geometrycznych własności przekształceń liniowych.

Definicja

Niech U będzie podprzestrzenią V. **Anihilatorem** podprzestrzeni U w V^*, oznaczamy przez $Ann(U)$ nazwiemy zbiór wszystkich funkcjonałów na V, które znikają na U, czyli $Ann(U) = \{f \in V^* \mid f(u) = 0,\ \text{dla każdego } u \in U\}$.

$Ann(U)$ to podprzestrzeń liniowa. Na mocy twierdzenia o izomorfizmie V oraz V^{**} możemy traktować elementy V^{**} po prostu jako wektory z V.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Jeśli V jest n-wymiarową przestrzenią liniową, to przyporządkowana

$$U \mapsto Ann(U),\ \text{dla } U \subseteq V \quad \text{oraz } X \mapsto Ann(X),\ \text{dla } X \subseteq V^*$$

zadają bijekcję pomiędzy k wymiarowymi podprzestrzeniami V i $(n-k)$ wymiarowymi podprzestrzeniami V^*. Jeśli $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią zadaną układem równań $\{\beta_i^* = 0 \,|\, i = 1, \ldots, n-k\}$, to $D(W) = \text{lin}(\beta_i, i = 1, \ldots, n-k\}$.