Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 11, 14.12.2021 r.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$.
- A zatem $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$.
- Analogicznie sprawdzamy $\psi(c\beta) = c\psi(\beta)$, dla każdych $\beta \in W$, $c \in K$.
- Zatem ψ jest liniowe i $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- $\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\beta) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta$.
- Zatem ϕ jest różnowartościowe. Dlaczego jest „na”?
- Mamy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, a więc dla każdego $\gamma \in W$ mamy:
$$\gamma = \mathrm{id}_W(\gamma) = (\phi \circ \psi)(\gamma) = \phi(\psi(\gamma)).$$
- A więc $\gamma = \phi(\psi(\gamma))$, czyli ϕ jest na.

Definicja 1.

Jeśli $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem, to przekształcenie liniowe: $\psi : W \to V$ spełniające $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ nazywamy **przekształceniem odwrotnym** do ϕ (lub **izomorfizmem odwrotnym** do ϕ).

Uwaga bez dowodu, ale się przyda.

- Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V .$$

- Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Przypomnienie

Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Załóżmy teraz, że $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem przestrzeni wymiaru n.

Aby istniało przekształcenie $\psi : W \to V$, które złożone z nim daje identyczność na przestrzeni V, zachodzić musi:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ otrzymujemy:

$$I_n = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Definicja 2.

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że A jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy, o ile istnieje, jako A^{-1}.

Uwaga 1. Dla każdej przestrzeni liniowej V wymiaru n oraz jej baz $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ mamy

$$M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Y}} = I_n = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}.$$

Uwaga 2. Jeśli $A_1, \ldots, A_k \in M_{n\times n}(K)$ są odwracalne, to również $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna, bo:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = I_n.$$

Definicja 2.

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że A jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy, o ile istnieje, jako A^{-1}.

Kluczowy przykład.

Definicja 3.

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V wymiaru n. Macierz

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

nazywamy **macierzą zamiany (transformacji) współrzędnych** z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Oczywiście $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

Definicja 2.

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że A jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy, o ile istnieje, jako A^{-1}.

Jedyność macierzy odwrotnej do danej (jeśli istnieje) wynika z (i) $\Leftrightarrow$ (ii) poniżej.

Wniosek

Niech $\phi \in L(K^n, K^n)$. Następujące warunki są równoważne:

(i) ϕ jest izomorfizmem,

(ii) macierz $M(\phi)_{st}^{st}$ jest odwracalna,

(iii) dla dow. baz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest odwracalna.

Dowód:

- Jeśli ϕ jest izomorfizmem oraz $\psi = \phi^{-1}$, to biorąc $M(\psi)_{st}^{st}$ mamy:

$$M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = M(\phi \circ \phi^{-1}) = M(\mathrm{id})_{st}^{st} = I_n.$$

- Analogicznie $M(\psi)_{st}^{st} \cdot M(\phi)_{st}^{st} = I_n$, co daje (i) $\Rightarrow$ (ii).
- Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ jest odwracalna i $AB = I_n$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas

$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I_n = M(id)_{st}^{st}.$$

- Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I_n$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
- Zatem ϕ i ψ to wzajemnie odwrotne izomorfizmy i mamy (ii) $\Rightarrow$ (i).
- Implikacja (iii) $\Rightarrow$ (ii) jest oczywista. Przeciwna wynika z tego, że

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}.$$

oraz z faktu, że iloczyn macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną.

Wniosek

Jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ spełniają warunek $AB = I_n$, to $B = A^{-1}$.

Kluczowe jest założenie, że A, B są rozmiaru $n \times n$. Oczywiście mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1],$$

ale żaden z czynników nie jest macierzą odwracalną.

Znając związek pomiędzy izomorfizmami a macierzami odwracalnymi przechodzimy do dwóch zagadnień.

1. Opis wszystkich macierzy izomorfizmów przestrzeni n-wymiarowej.
2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej do danej (o ile to możliwe).

Twierdzenie

Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(i) A jest macierzą zamiany współrzędnych w K^n,

(ii) A jest macierzą odwracalną,

(iii) $\phi \in L(K^n, K^n)$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem,

(iv) $r(A) = n$.

Dowód.

- Równoważność (ii) oraz (iii) pokazaliśmy wyżej.
- Mamy $r(A) = \dim \operatorname{im} \phi = n$, więc w sposób oczywisty (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).
- Również implikacja (i) $\Rightarrow$ (iii) została uzasadniona wyżej.
- Pozostaje więc wykazać (iii) $\Rightarrow$ (i).Jeśli przez $\mathcal{A}$ oznaczymy zbiór kolumn macierzy A, to $\mathcal{A}$ jest bazą K^n (izomorfizm przeprowadza bazę na bazę). Oznacza to, że $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$.

Pierwszy algorytm wyznaczania $A^{-1} \in M_{n\times n}(K)$ (jeśli istnieje).

- Stwórz macierz rozmiaru $n \times 2n$, która w pierwszych n kolumnach ma kolejne kolumny A, a w kolejnych n: wektory bazy standardowej w K^n
$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$
- Doprowadź macierz wyżej do postaci, w której pierwsze n kolumn to kolejne wektory bazy standardowej. Jeśli to możliwe, wówczas kolejne n kolumn uzyskanej macierzy to kolejne kolumny A^{-1}:
$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right].$$

Przykład:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right].$$

Stąd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Obserwacja-przykład. **Przemnażanie z lewej strony** macierzy o wyrazach a, b, c, d, e, f przez pewne macierze dokonuje na niej odpowiedniej operacji elementarnej na wierszach.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ xd & xe & xf \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \end{bmatrix},$$

Obserwacja-przykład. **Przemnażanie z prawej strony** macierzy o wyrazach a, b, c, d, e, f przez pewne macierze dokonuje na niej odpowiedniej operacji elementarnej na kolumnach.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & xb & c \\ d & xe & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \end{bmatrix}.$$

Definicja 3.

Niech n, i, j będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech x, y będą elementami ciała K, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze należące do $M_{n \times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych**.

- $E_{ij}^{n}(x) = [a_{st}] \in M_{n \times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} x, & \text{gdy } s = i, t = j \\ 1, & \text{gdy } s = t \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

na przykład:

$$E_{24}^{5}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {\color{red}a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3.

Niech n, i, j będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech x, y będą elementami ciała K, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze należące do $M_{n\times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych**.

- $T_{ij}^n = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } s = t \neq i, j \\ 1, & \text{gdy } s = i, t = j \text{ lub } s = j, t = i \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

na przykład:

$$T_{35}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{0} \end{bmatrix}.$$

Definicja 3.

Niech n, i, j będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech x, y będą elementami ciała K, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze należące do $M_{n\times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych**.

- $I_i^n(y) = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} y, & \text{gdy } s = t = i \\ 1, & \text{gdy } s = t \neq i \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} .$$

na przykład:

$$I_1^5(c) = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Uwaga 1.

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

- $E_{ij}^{m}(x) \cdot A$ – macierz powstała z A przez dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza pomnożonego przez x,
- $A \cdot E_{ij}^{n}(x)$ – macierz powstała z A przez dodanie do j-tej kolumny i-tej kolumny pomnożonej przez x.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d + xa & e + xb & f + xc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c + xa \\ d & e & f + xd \end{bmatrix}.$$

Uwaga 1.

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

- $T_{ij}^m \cdot A$ – macierz powstała z A przez przestawienie i-tego i j-tego wiersza,
- $A \cdot T_{ij}^n$ – macierz powstała z A przez przestawienie i-tej i j-tej kolumny.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix}.$$

Uwaga 1.

Dla każdej macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$ zachodzi:

- $I_i^m(y) \cdot A$ – macierz powstała z A przez pomnożenie i-tego wiersza przez y,
- $A \cdot I_i^n(y)$ – macierz powstała z A przez pomnożenie i-tej kolumny przez y.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ yd & ye & yf \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & yb & c \\ d & ye & f \end{bmatrix}.$$

Fakt

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje

- macierz $P \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, T_{ij}^m, że macierz PA jest schodkowa,
- macierz $Q \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, T_{ij}, $I_i(y)$, że macierz QA jest schodkowa zredukowana.

Przykład: dla macierzy A postaci

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

macierz Q to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 2.

Dla każdej macierzy $S \in M_{n\times n}(K)$ jednego z typów $E^n_{ij}(a)$, T^n_{ij}, $I^n_i(c)$ istnieje macierz S' tego samego typu taka, że:

$$S'S = SS' = I.$$

Dowód (jak dla operacji elementarnych. Istotnie, łatwo sprawdzić, że

- jeśli $S = E^n_{ij}(a)$, to $S' = E^n_{ij}(-a)$,
- jeśli $S = T_{ij}$, to $S' = T_{ij}$,
- jeśli $S = I^n_i(c)$, to $S' = I^n_i(c^{-1})$

Na przykład:

$$E^5_{24}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^5_{24}(a)^{-1} = E^5_{24}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wniosek

Niech $A' \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą otrzymaną z A przez sprowadzenie do zredukowanej postaci schodkowej za pomocą elementarnych operacji na wierszach. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- macierz A jest odwracalna
- $A' = I$.

W szczególności następujące warunki są równoważne:

- macierz A jest odwracalna,
- A jest iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, T_{ij}, $I_i(y)$, gdzie $y \neq 0$.

Wskazówka: jeśli

$$A' = W_r \cdot \ldots \cdot W_1 \cdot A,$$

gdzie W_i – macierze operacji elementarnych, to $A =?$

Wniosek

Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$ są macierzami schodkowymi zredukowanymi i B jest otrzymana z A elementarnymi operacjami na wierszach, to $A = B$. W szczególności dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje dokładnie jedna macierz schodkowa zredukowana otrzymana z A operacjami elementarnymi na wierszach.

Wniosek

Jeśli $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{m\times m}(K)$ oraz $C \in M_{n\times n}(K)$, przy czym $r(B) = m$ i $r(C) = n$, to:

$$r(BAC) = r(A).$$

Dowód: skoro B ma rząd m, a C ma rząd n, to znaczy, że są to macierze odwracalne. Każdą z nich można zatem przedstawić jako iloczyn macierzy operacji elementarnych. Stąd macierz BAC powstaje przez wykonanie pewnego ciągu wierszowych i kolumnowych operacji elementarnych na macierzy A.