Geometria z algebrą liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 10, 7.12.2021 r.

Definicja 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\phi, \psi : V \to W$ będą przekształceniami liniowymi.

- **Sumą** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\phi + \psi : V \to W$ zadane wzorem:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v), \text{ dla każdego } v \in V,$$

- **Iloczynem** ϕ przez element $a \in K$ nazywamy odwzorowanie $a\phi : V \to W$ postaci:

$$(a\phi)(v) = a \cdot \phi(v), \text{ dla każdego } v \in V.$$

Uwaga. Jeśli $\phi, \psi : V \to W$ są przekształceniami liniowymi, to $\phi + \psi$ oraz $a\phi$ są przekształceniami liniowymi. Zbiór wszystkich przekształceń liniowych $V \to W$ tworzy przestrzeń liniową nad K, oznaczaną jako $L(V, W)$. Zerem tej przestrzeni liniowej jest przekształcenie zerowe.

Twierdzenie 1.

Ma miejsce izomorfizm przestrzeni liniowych:

$$L(K^n, K^m) \simeq M_{m\times n}(K),$$

Dowód. Z poprzedniego wykładu wiemy, że dla każdego $\phi \in L(K^n, K^m)$ istnieje jednoznacznie wyznaczona macierz $M(\phi) = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ taka, że obraz i-tego wektora z bazy standardowej ϵ_i przy ϕ jest i-tą kolumną macierzy $M(\phi)$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Twierdzimy, że przyporządkowanie: $M : L(K^n, K^m) \to M_{m\times n}(K)$ zadane wzorem:

$$\phi \xrightarrow{M} M(\phi)$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód cd.

- M jest różnowartościowe, bo każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie określone na bazie (a kolumny $M(\phi)$ to obrazy wektorów z bazy standardowej).
- Oczywiście jest to również suriekcja: dla każdej macierzy $X \in M_{m\times n}(K)$ można określić $\phi : K^n \to K^m$, które przeprowadza i-wektor standardowy K^n w i-tą kolumnę macierzy X, co pokazywaliśmy ostatnio.
- Dla dowolnych $\phi, \psi : K^n \to K^m$ macierz $M(\phi + \psi)$ ma w i-tej kolumnie wektor $(\phi + \psi)(\epsilon_i)$, a zatem jest sumą i-tych kolumn macierzy $M(\phi)$ oraz $M(\psi)$.
- Jest też jasne, że dla każdego $\lambda \in K$ oraz $\phi \in L(K^n, K^m)$ mamy $M(\lambda\phi) = \lambda \cdot M(\phi)$.
- A zatem M jest liniową bijekcją, czyli izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Cel: inne izomorfizmy $L(K^n, K^m)$ z $M_{m\times n}(K)$.

- Co wiemy o przekształceniu ϕ?
- Jaka jest *geometria* tego przekształcenia?
- Jak inaczej niż wzorem opisać to przekształcenie?

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned}\phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \ + x_3(-1,1).\end{aligned}$$

Wzór mówi jak wyglądają obrazy bazy standardowej.

Cel: inne izomorfizmy $L(K^n, K^m)$ z $M_{m\times n}(K)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned}\phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \ + x_3(-1,1).\end{aligned}$$

Inaczej pisząc:

$$\begin{aligned}\phi((1,0,0)) &= (2,1) = {\color{red}2} \cdot (1,0) + {\color{red}1} \cdot (0,1),\\ \phi((0,1,0)) &= (1,-1) = {\color{blue}1} \cdot (1,0) {\color{blue}-} {\color{blue}1} \cdot (0,1),\\ \phi((0,0,1)) &= (-1,1) = {\color{cyan}-1} \cdot (1,0) + {\color{cyan}1} \cdot (0,1)\end{aligned}$$

Cel: inne izomorfizmy $L(K^n, K^m)$ z $M_{m\times n}(K)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Niech

- $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (2, 1, 0)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
- $\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (2, 0)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Wówczas:

$$\phi(\alpha_1) = (1, 2) = 2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \beta_2,$$

$$\phi(\alpha_2) = (-1, 1) = 1 \cdot \beta_1 - \frac{1}{2} \cdot \beta_2,$$

$$\phi(\alpha_3) = (5, 1) = 1 \cdot \beta_1 + \frac{5}{2} \cdot \beta_2$$

Definicja 3.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V,
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą przestrzeni W.

Macierzą przekształcenia ϕ w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywamy taką macierz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdego $1 \leq j \leq n$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i,$$

Taką macierz A oznaczamy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Innymi słowy, dla każdego $\phi : V \to W$ oraz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jw., oraz każdego $1 \leq j \leq n$

w j-tej kolumnie macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ stoją współrzędne wektora $\phi(\alpha_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3),$$

Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie
$$\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (2, 1, 0)$$
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie
$$\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (2, 0).$$

Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

bo

$$\phi(\alpha_1) = 2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \beta_2, \quad \phi(\alpha_2) = 1 \cdot \beta_1 - \frac{1}{2} \cdot \beta_2, \quad \phi(\alpha_3) = 1 \cdot \beta_1 + \frac{5}{2} \cdot \beta_2.$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 1x_2 - 1x_3, 1x_1 - 1x_2 + 1x_3),$$

Niech

- $st = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie
$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$$
- $st = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie
$$\beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (0, 1).$$

Wówczas:

$$M(\phi)^{st}_{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

bo

$$\phi(\alpha_1) = 2\cdot(1, 0)+1\cdot(0, 1), \quad \phi(\alpha_2) = 1\cdot(1, 0)-1\cdot(0, 1), \quad \phi(\alpha_3) = -1\cdot(1, 0)+1\cdot(0, 1).$$

Przykład. Załóżmy, że mamy bazę

$$\mathcal{A} = ((1,0,1),(2,0,-1),(5,1,3))$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i rozważmy przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o następującej macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z definicją, w pierwszej kolumnie są współrzędne wektora $\phi((1,0,1))$ w bazie $\mathcal{A}$, w drugiej kolumnie są współrzędne wektora $\phi((2,0,-1))$ w bazie $\mathcal{A}$, zaś w trzeciej kolumnie są współrzędne wektora $(5,1,3)$ w bazie $\mathcal{A}$, czyli:

$$\begin{aligned} \phi((1,0,1)) &= 1\cdot(1,0,1) + 0\cdot(2,0,-1) + 0\cdot(5,1,3) \\ \phi((2,0,-1)) &= 0\cdot(1,0,1) - 1\cdot(2,0,-1) + 0\cdot(5,1,3) \\ \phi((5,1,3)) &= 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(2,0,-1) - 1\cdot(5,1,3) \end{aligned}$$

Wniosek: ϕ jest symetrią względem $\mathrm{lin}((1,0,1))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(((2,0,-1),(5,1,3)))$.

Przykład. Niech $\mathrm{id}: K^n \to K^n$ będzie przekształceniem identycznościowym, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niech będzie bazą K^n. Wówczas:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz tę nazywać będziemy **macierzą identycznościową** lub **macierzą jednostkową** (rozmiaru n), ozn. I (lub I_n, gdy chcemy podkreślić jej rozmiar).

Uwaga: kolejność wektorów bazowych ma znaczenie! Np. dla bazy K^3 postaci $st' = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ mamy:

$$M(\mathrm{id})_{st'}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $\phi_a : K^n \to K^n$ będzie jednokładnością o skali a. W bazach standardowych macierz ϕ_a to:

$$M(\phi_a)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

Weźmy jednak bazę $\mathcal{B} = (a\epsilon_1, \ldots, a\epsilon_n)$ przestrzeni K^n, gdzie $st = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Wówczas mamy:

$$M(\phi_a)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Wniosek: jedna macierz może opisywać różne przekształcenia liniowe (w pewnych bazach), za tydzień pokażemy które dokładnie.

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na W wzdłuż U.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla $k \leq n$) jest bazą przestrzeni W,
- $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U

Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów bazy standardowej K^n, zaś dalej kolumny zerowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech ϕ będzie **symetrią** względem W wzdłuż U.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla $k \leq n$) jest bazą przestrzeni W,
- $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U

Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów, zaś dalej $n-k$ wektorów przeciwnych do wektorów z bazy standardowej K^n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix},$$

Przykład. Niech $d : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n}$ będzie przekształceniem liniowym polegającym na braniu pochodnej wielomianu stopnia co najwyżej n.

Niech $\mathcal{X} = (1, x, \ldots, x^n)$ będzie bazą przestrzeni $K[x]_{\leq n}$.

Wówczas:

$$M(d)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga: formalnie nie mówimy o macierzach nieskończonego rozmiaru, ale w tym przypadku jest intuicja „macierzy pochodnej", czyli macierzy przekształcenia $d : K[x] \to K[x]$.

Twierdzenie 2.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{B}$ będzie bazą W, przy czym

$$n = \dim V, \quad m = \dim W.$$

Wówczas przyporządkowanie każdemu przekształceniu liniowemu $\phi \in L(V, W)$ jego macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zadaje izomorfizm

$$L(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(K),$$

Dowód: analogiczny jak na początku.

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Oczywiście $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to także $\psi \circ \phi$ jest przekształceniem liniowym, bo np. dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(\alpha + \beta) &= \psi(\phi(\alpha + \beta)) = \\ &= \psi(\phi(\alpha) + \phi(\beta)) = \\ &= \psi(\phi(\alpha)) + \psi(\phi(\beta)) = \\ &= (\psi \circ \phi)(\alpha) + (\psi \circ \phi)(\beta).\end{aligned}$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Fakt istnienia złożenia przekształceń $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ postaci $\psi \circ \phi : V \to Z$ opisujemy często na diagramie w następujący sposób:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\psi \circ \phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Uwaga: składanie przekształceń nie jest przemienne! Np. dla $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zadanych wzorami:

$$\phi(x, y) = (x, 0), \quad \psi(x, y) = (x, x)$$

mamy

$$(\psi \circ \phi)(x, y) = \psi(x, 0) = (x, x), \quad (\phi \circ \psi)(x, y) = \phi(x, x) = (x, 0).$$

Problem. Jeśli dane są dwa przekształcenia $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $M(\psi)_{st}^{st}$, to co możemy powiedzieć o macierzy złożenia

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st}?$$

Niech $g : K^n \to K, f : K \to K^n$ będą zadane wzorami:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \quad f(x) = (b_1 x, b_2 x, \ldots, b_n x),$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in K$. Macierze tych przekształceń w bazach standardowych mają postać:

$$M(g)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \quad M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $(g \circ f)(x) = g(b_1 x, \ldots, b_n x) = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)x$. Macierz $g \circ f$ w bazach standardowych to:

$$M(g \circ f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \end{bmatrix}.$$

Problem. Jeśli dane są dwa przekształcenia $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $M(\psi)_{st}^{st}$, to co możemy powiedzieć o macierzy złożenia

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st}?$$

Definicja 5.

Iloczynem macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{m\times k}(K)$ oraz $B = (b_{ij}) \in M_{k\times n}(K)$ nazywamy taką macierz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdych i, j mamy:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Innymi słowy: wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy C to suma iloczynów odpowiadających sobie l-tych wyrazów w i-tym wierszu macierzy A oraz w j-tym wierszu macierzy B.(czasem mówimy krótko: iloczyn i-tego wiersza i j-tej kolumny, ale jeszcze kiedyś nadamy temu odpowiedni sens).

Przykład. Jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wówczas iloczyn macierzy A oraz B ma postać:

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla rozważanych wyżej macierzy A, B nie istnieje iloczyn macierzy postaci BA.

Ważna motywacja 1. Jeśli dany jest układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

to układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ldots\ ,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$.

Wówczas

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ważna motywacja 2. Przy odpowiednim doborze baz macierz złożenia przekształceń liniowych jest iloczynem macierzy tych przekształceń.

Twierdzenie 3.

Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Dowód. Bierzemy bazy odpowiednio przestrzeni V, W, Z:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m), \quad \mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

Niech też dane będą macierze:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{ij}), \quad M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = (c_{ij})$$

dla odpowiednich zakresów i, j w każdej z macierzy. Z definicji macierzy przekształceń liniowych $\phi, \psi, \psi \circ \phi$:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_j) &= a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m, \\ \psi(\beta_l) &= b_{1l} \cdot \gamma_1 + b_{2l} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{kl} \cdot \gamma_k, \\ (\psi \circ \phi)(\alpha_j) &= c_{1j} \cdot \gamma_1 + c_{2j} \cdot \gamma_2 + \ldots + c_{kj} \cdot \gamma_k. \end{aligned}$$

Z definicji złożenia oraz liniowości ψ mamy jednak:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) &= \psi(a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m) = \\ &= a_{1j} \cdot \psi(\beta_1) + a_{2j} \cdot \psi(\beta_2) + \ldots + a_{mj} \cdot \psi(\beta_m). \end{aligned}$$

Dowód. Bierzemy bazy odpowiednio przestrzeni V, W, Z:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m), \quad \mathcal{C} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k).$$

Niech też dane będą macierze:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{ij}), \quad M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = (c_{ij})$$

dla odpowiednich zakresów i, j w każdej z macierzy. Z definicji macierzy przekształceń liniowych $\phi, \psi, \psi \circ \phi$:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_j) &= a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m, \\ \psi(\beta_l) &= b_{1l} \cdot \gamma_1 + b_{2l} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{kl} \cdot \gamma_k, \\ (\psi \circ \phi)(\alpha_j) &= c_{1j} \cdot \gamma_1 + c_{2j} \cdot \gamma_2 + \ldots + c_{kj} \cdot \gamma_k. \end{aligned}$$

Rozkładamy każdy z wektorów $\psi(\beta_l)$ w bazie $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) = {} & a_{1j} \cdot (b_{11} \cdot \gamma_1 + b_{21} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{k1} \cdot \gamma_k) + \\ & + a_{2j} \cdot (b_{12} \cdot \gamma_1 + b_{22} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{k2} \cdot \gamma_k) + \cdots \\ & + a_{mj} \cdot (b_{1m} \cdot \gamma_1 + b_{2m} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{km} \cdot \gamma_k). \end{aligned}$$

Dowód. Bierzemy bazy odpowiednio przestrzeni V, W, Z:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m), \quad \mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

Niech też dane będą macierze:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{ij}), \quad M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = (c_{ij})$$

dla odpowiednich zakresów i, j w każdej z macierzy. Z definicji macierzy przekształceń liniowych $\phi, \psi, \psi \circ \phi$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha_j) &= a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m, \\
\psi(\beta_l) &= b_{1l} \cdot \gamma_1 + b_{2l} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{kl} \cdot \gamma_k, \\
(\psi \circ \phi)(\alpha_j) &= c_{1j} \cdot \gamma_1 + c_{2j} \cdot \gamma_2 + \ldots + c_{kj} \cdot \gamma_k.
\end{aligned}$$

Grupujemy teraz wszystkie wyrazy stojące przy wektorach z bazy $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) &= (a_{1j}b_{11} + a_{2j}b_{12} + \ldots + a_{mj}b_{1m})\gamma_1 + \\
&+ (a_{1j}b_{21} + a_{2j}b_{22} + \ldots + a_{mj}b_{2m})\gamma_2 + \cdots \\
&+ (a_{1j}b_{k1} + a_{2j}b_{k2} + \ldots + a_{mj}b_{km})\gamma_k.
\end{aligned}$$

Dowód. Bierzemy bazy odpowiednio przestrzeni V, W, Z:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m), \quad \mathcal{C} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k).$$

Niech też dane będą macierze:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{ij}), \quad M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = (c_{ij})$$

dla odpowiednich zakresów i, j w każdej z macierzy. Z definicji macierzy przekształceń liniowych $\phi, \psi, \psi \circ \phi$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha_j) &= a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m, \\
\psi(\beta_l) &= b_{1l} \cdot \gamma_1 + b_{2l} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{kl} \cdot \gamma_k, \\
(\psi \circ \phi)(\alpha_j) &= c_{1j} \cdot \gamma_1 + c_{2j} \cdot \gamma_2 + \ldots + c_{kj} \cdot \gamma_k.
\end{aligned}$$

A zatem wyraz c_{ij}, stojący przy wektorze γ_i w powyższym przedstawieniu, to

$$a_{1j}b_{i1} + a_{2j}b_{i2} + \ldots + a_{mj}b_{im},$$

czyli jest on *iloczynem* i-tego wiesza $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ i j-tej kolumny $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Ważna motywacja 3. Wykonywanie przekształcenia liniowego pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi może być interpretowane za pomocą mnożenia macierzy tego przekształcenia przez odpowiedni wektor współrzędnych.

Uwaga

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V,
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ niech będzie bazą przestrzeni W.

Jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi wektora α w bazie $\mathcal{A}$ oraz $b_1, \ldots, b_m$ są współrzędnymi wektora $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ważna motywacja 3. Wykonywanie przekształcenia liniowego pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi może być interpretowane za pomocą mnożenia macierzy tego przekształcenia przez odpowiedni wektor współrzędnych.

Wniosek z uwagi wyżej

Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V oraz

$$C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$

gdzie $\mathrm{id} = \mathrm{id}_V$ jest identycznością na V, to dla każdego $\alpha \in V$: jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, zaś $b_1, \ldots, b_n$ są jego współrzędnymi w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Dowód.

- Weźmy bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Oczywiście wektor współrzędnych wektora α_i w bazie $\mathcal{A}$ to i-ty wektor bazy standardowej w K^n, czyli $\epsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Weźmy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$. Iloczyn: $A \cdot \epsilon_i^T$? to i-ta kolumna macierzy A.
- Niech $k_1, \ldots, k_n$ to kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Mamy wtedy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} \cdot (a_1\epsilon_1^T + \ldots + a_n\epsilon_n^T) = a_1k_1 + \ldots + a_nk_n.$$

- Po drodze potrzebujemy łatwe ćwiczenie: dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m\times k}(K)$ oraz macierzy $C, D \in M_{k\times n}(K)$ mamy równości:

$$A(C + D) = AC + AD, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Dowód.

- Weźmy bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Oczywiście wektor współrzędnych wektora α_i w bazie $\mathcal{A}$ to i-ty wektor bazy standardowej w K^n, czyli $\epsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Weźmy macierz $A \in M_{m \times n}(K)$. Iloczyn: $A \cdot \epsilon_i^T$? to i-ta kolumnna macierzy A.
- Niech $k_1, \ldots, k_n$ to kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Mamy wtedy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} \cdot (a_1 \epsilon_1^T + \ldots + a_n \epsilon_n^T) = a_1 k_1 + \ldots + a_n k_n.$$

- Zauważmy jednak, że k_i to wektor współrzędnych $\phi(\alpha_i)$ w bazie $\mathcal{B}$. A zatem powyższy wektor jest oczywiście wektorem współrzędnych $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Ważna motywacja 4. Zależności pomiędzy macierzami przekształceń.

Kluczowy wniosek

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni V, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni W, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Dowód.

- Skoro $\phi : V \to W$, to $\phi = \mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V$.
- Zatem z twierdzenia wyżej mamy:
$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Przykład. Niech $U = \mathrm{lin}((10, 14, -4))$, $\quad W = \mathrm{lin}((0, 1, 0), (0, 1, 1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ względem U i wzdłuż W.

Innymi słowy, szukamy $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{R}$ takich, że:

$\phi((x_1, x_2, x_3)) = ({\color{red}a_{11}} x_1 + {\color{blue}a_{12}} x_2 + {\color{teal}a_{13}} x_3, {\color{red}a_{21}} x_2 + {\color{blue}a_{12}} x_2 + {\color{teal}a_{23}} x_3, {\color{red}a_{31}} x_1 + {\color{blue}a_{32}} x_2 + {\color{teal}a_{33}} x_3)$.

Równoważnie:

$$\begin{aligned}
\phi((1, 0, 0)) &= ({\color{red}a_{11}}, {\color{red}a_{21}}, {\color{red}a_{31}}), \\
\phi((0, 1, 0)) &= ({\color{blue}a_{12}}, {\color{blue}a_{22}}, {\color{blue}a_{32}}), \\
\phi((0, 0, 1)) &= ({\color{teal}a_{13}}, {\color{teal}a_{23}}, {\color{teal}a_{33}}).
\end{aligned}$$

Jeszcze inaczej, szukamy macierzy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} {\color{red}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & {\color{teal}a_{13}} \\ {\color{red}a_{21}} & {\color{blue}a_{22}} & {\color{teal}a_{23}} \\ {\color{red}a_{31}} & {\color{blue}a_{32}} & {\color{teal}a_{33}} \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $U = \mathrm{lin}((10, 14, -4))$, $\quad W = \mathrm{lin}((0, 1, 0), (0, 1, 1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ względem U i wzdłuż W.

Zgodnie z definicją symetrii, mamy:

$$\begin{aligned}
\phi((10,14,-4)) = (10,14,-4) &= 1 \cdot (10,14,-4) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,1,1) \\
\phi((0,1,0)) = -(0,1,0) &= 0 \cdot (10,14,-4) + (-1) \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,1,1) \\
\phi((0,1,1)) = -(0,1,1) &= 0 \cdot (10,14,-4) + 0 \cdot (0,1,0) + (-1) \cdot (0,1,1)
\end{aligned}$$

Z warunków zapisanych wyżej wynika, że biorąc bazę

$$\mathcal{A} = ((10, 14, -4), (0, 0, 1), (0, 1, 1))$$

mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $U = \text{lin}((10, 14, -4)), \quad W = \text{lin}((0, 1, 0), (0, 1, 1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ względem U i wzdłuż W.

Zgodnie z formułą na zmianę bazy mamy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}}.$$

mamy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}}.$$

Przykład. Niech $U = \mathrm{lin}((10,14,-4)), \quad W = \mathrm{lin}((0,1,0),(0,1,1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\phi \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ względem U i wzdłuż W.

Wyznaczmy $M(\mathrm{id})^{st}_{\mathcal{A}}$ oraz $M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{st}$. Dla każdego $v \in \mathbb{R}^3$ mamy $\mathrm{id}(v) = v$, czyli

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}((10,14,-4)) &= (10,14,-4) = 10\cdot(1,0,0) + 14\cdot(0,1,0) - 4\cdot(0,0,1)\\
\mathrm{id}((0,1,0)) &= \quad (0,1,0) = \ 0\cdot(1,0,0) + \ 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)\\
\mathrm{id}((0,1,1)) &= \quad (0,1,1) = \ 0\cdot(1,0,0) + \ 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1).
\end{aligned}$$

Nietrudno trudniej wyznaczyć współrzędne wektorów st w bazie $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}((1,0,0)) = (1,0,0) &= \frac{1}{10}\cdot(10,14,-4) - \frac{9}{5}\cdot(0,1,0) + \frac{2}{5}\cdot(0,1,1)\\
\mathrm{id}((0,1,0)) = (0,1,0) &= 0\cdot(10,14,-4) + \quad 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,1,1)\\
\mathrm{id}((0,0,1)) = (0,0,1) &= 0\cdot(10,14,-4) + (-1)\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,1,1).
\end{aligned}$$

$$\text{Zatem} \quad M(\mathrm{id})^{st}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0\\ 14 & 1 & 1\\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0\\ -\frac{9}{5} & 1 & -1\\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $U = \mathrm{lin}((10, 14, -4))$, $\quad W = \mathrm{lin}((0, 1, 0), (0, 1, 1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ względem U i wzdłuż W.

W rezultacie zgodnie z formułą na zmianę bazy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}},$$

mamy

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{5} & 1 & -1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{18}{5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy więc szukany wzór:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, \frac{18}{5}x_1 - x_2 + 2x_3, x_3).$$

Uwaga: czy tylko formułę powyżej można traktować jako „wzór” ϕ? A co z formułą:

$\phi(a_1 \cdot (10, 14, -4) + a_2 \cdot (0, 0, 1) + a_3 \cdot (0, 1, 1)) = (10a_1, 14a_1 - a_3, -4a_1 - a_2 - a_3)$?