Operacje na podprzestrzeniach. Przekształcenia liniowe – wstęp

Ostatnia aktualizacja: 26.11.2021 r.

Zbliżamy się do końca pierwszej części naszego semestralnego wykładu, której głównym celem było określenie pojęcia przestrzeni liniowej – struktury odzwierciedlającej geometryczne własności zbiorów rozwiązań jednorodnych układów równań liniowych o współczynnikach w ciele. Wprowadziliśmy szereg fundamentalnych pojęć służących do opisu przestrzeni liniowych: kombinacje liniowe, podprzestrzenie (w tym: rozpięte na układzie wektorów), liniową niezależność, bazę oraz wymiar. Pojęcia te pozwalają z jednej strony na głębsze zrozumienie związków pomiędzy układami równań, ich zbiorami rozwiązań oraz macierzami (pojęcie rzędu i tw. Kroneckera-Capellego), z drugiej zaś pozwalają na sensowny opis struktury przestrzeni liniowej. Dokonaliśmy klasyfikacji wszystkich podprzestrzeni K^n – są to przestrzenie rozwiązań jednorodnych układów równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach w ciele K.

Dziś zobaczymy w jaki sposób poznane dotąd metody pozwalają nam poruszać się w świecie podprzestrzeni przestrzeni liniowej, w szczególności w jaki sposób pozwalają uzyskiwać jej rozkłady. Aby wskazać, choćby na poziomie intuicji, znaczenie tychże rozkładów, rozpoczniemy opowieść o przekształceniach liniowych, czyli funkcjach pomiędzy przestrzeniami liniowymi, zgodnymi z ich strukturą, tzn. gdzie obraz sumy jest sumą obrazów, a obraz skalarnej wielokrotności – tą samą skalarną wielokrotnością obrazu.

Zacznijmy od powrotu do przestrzeni K^n i zobaczmy w jaki sposób mając dane jej podprzestrzenie konstruować możemy nowe, związane z nimi podprzestrzenie.

- Jeśli V_1, V_2 są podprzestrzeniami w K^n opisanymi układami równań U_1 oraz U_2, to podprzestrzeń
$$V_1 \cap V_2$$
jest opisana układem równań złożonym ze wszystkich równań z U_1 oraz wszystkich równań z U_2. Na przykład, jeśli $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ opisane są odpowiednio układami $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0$ oraz $x_1 - x_2 = 0$, to największa podprzestrzeń zawierająca elementy zarówno z W_1, jak i W_2, czyli właśnie $W_1 \cap W_2$, opisana jest układem równań:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}.$$
- Jeśli $V_1 = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $V_2 = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ są podprzestrzeniami przestrzeni V, to podprzestrzeń:
$$W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$$
złożona jest ze wszystkich wektorów postaci $\alpha + \beta$, gdzie $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$ jest najmniejszą podprzestrzenią w V, która zawiera jednocześnie V_1 oraz V_2. Innymi słowy, jest to przestrzeń $\mathrm{lin}(V_1 \cup V_2)$. Na przykład, jeśli $V_1 = \mathrm{lin}((1,0,1)), V_2 = \mathrm{lin}((1,0,2)) \subseteq \mathbb{R}^3$, to najmniejsza podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$ zawierająca te dwie podprzestrzenie to $\mathrm{lin}((1,0,1),(1,0,2))$.

Definicja 1. *Niech $X, Y \subseteq V$. Przez $X + Y$ oznaczać będziemy zbiór $\{x + y \,|x \in X, y \in Y\}$. Jeśli X, Y są podprzestrzeniami w V, to $X + Y$ też jest podprzestrzenią V zwaną* ***sumą podprzestrzeni*** *X i Y.*

Przykład sumy podprzestrzeni: jeśli $X = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Y = \mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2)$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 \in V$, to $X + Y = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$. Wynika to bezpośrednio z definicji kombinacji liniowej. Odnotujmy w tym miejscu, że suma podprzestrzeni jest zwykle czymś innym, niż suma mnogościowa $X \cup Y$, która najczęściej nie jest podprzestrzenią! Powyższy przykład uogólnia następująca prosta uwaga.

Uwaga 1. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas $V_1 + V_2 = \mathrm{lin}(V_1 \cup V_2)$.*

Również pojęcie części wspólnej podprzestrzeni przestrzeni K^n przenosi się na dowolne przestrzenie liniowe. Następującą uwagę pozostawiamy jako kolejne proste ćwiczenie.

Uwaga 2. *Część wspólna $X \cap Y$ podprzestrzeni liniowej V jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją* ***iloczynem, przecięciem*** *(lub* ***częścią wspólną****) podprzestrzeni.*

Zauważmy zatem, że z wraz dowolnymi dwiema podprzestrzeniami V_1, V_2 przestrzeni V rozważać można dwie podprzestrzenie: $V_1 \cap V_2$ – będącą ich największą wspólną podprzestrzenią oraz $V_1 + V_2$ – najmniejszą przestrzeń liniową, której V_1, V_2 są podprzestrzeniami. Kluczowa dla zrozumienia związku w opisanym układzie podprzestrzeni jest następująca formuła.

Twierdzenie 1 (Formuła Grassmanna, 1844)**.** *Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód. Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$. Uzupełniamy ja, na mocy twierdzenia Steinitza, do bazy $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V_1 oraz do bazy $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_k$ przestrzeni V_2. Wykażemy, że układ $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ jest bazą przestrzeni $V_1 + V_2$. Oczywiście układ ten rozpina tą przestrzeń. Pozostaje wykazać jego liniową niezależność.

Przypuśćmy, że $c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$. Stąd wynika, że

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = -(b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l) \in V_1. \tag{1}$$

Zauważmy jednak, że jeśli $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_l\beta_l \in V_1$, to kombinacja ta należy w istocie do iloczynu $V_1 \cap V_2$, a więc jest równa pewnej kombinacji postaci $c'_1\gamma_1 + \ldots + c'_m\gamma_m$. Wtedy jednak $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l - c'_1\gamma_1 - \ldots - c'_m\gamma_m = 0$, co z liniowej niezależności układu $\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ implikuje, że $b_1 = b_2 = \ldots = b_l = c'_1 = \ldots = c'_m = 0$.

Powyższy argument oznacza, że we wzorze (1) całą kombinację liniową $-(b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l)$ możemy zastąpić przez 0. Mamy zatem:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

To jest jednak kombinacja wektorów bazowych z V_1, co oznacza, że $c_1 = \ldots = c_m = a_1 = \ldots = a_k = 0$. Istotnie więc $\dim(V_1 + V_2) = m + k + l = (m + k) + (m + l) - m = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$. □

Z punktu widzenia dalszych rozważań istotne będzie rozkładanie przestrzeni liniowych na rozmaite sumy podprzestrzeni. Dlaczego? Ograniczmy się na razie do pewnej geometrycznej intuicji.

Załóżmy, że na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozważamy rzut prostopadły $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na prostą $y = x$. Nie znamy formalnych definicji (będą w dalszej części tego wykładu), ale na poziomie intuicji – co się stanie po takim rzutowaniu z wektorem (a, b)? Aby się o tym przekonać musimy rozłożyć ten wektor na dwa wektory postaci: (x, x) oraz $(z, -z)$ tak, by $a = x + z, b = x - z$. Jeden z nich to wektor kierunkowy prostej $y = x$, a drugi wektor ma kierunek rzutu:

$$(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad \text{czyli} \quad r(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Rozkład ten pochodzi od przedstawienia $\mathbb{R}^2$ w postaci sumy podprzestrzeni

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1, 1) + \mathrm{lin}(1, -1).$$

Zauważmy, że jedna ze składowych, na które rozłożyliśmy $\mathbb{R}^2$ jest stała względem rozważanego rzutu, to znaczy: rzut ten wykonany na wektorze z $\mathrm{lin}(1, 1)$ nie zmienia żadnego wektora. Jednocześnie, rzut „oglądany" tylko w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(1, -1)$ zamienia każdy z jej elementów w zerowy. Rzut działa więc w sposób geometrycznie czytelny na wyróżnionych „składowych" $\mathbb{R}^2$, a nawet więcej – jest wyróżniony wśród wszystkich rzutów w $\mathbb{R}^2$ przez to właśnie rozbicie. Zauważmy jeszcze, że uzyskany rozkład wektora (a, b) na elementy z $\mathrm{lin}(1, 1)$ oraz $\mathrm{lin}(1, -1)$ jest jednoznaczny. Prowadzi to do następującej definicji.

Definicja 2. *Jeśli dla pewnych podprzestrzeni X, Y przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $x \in X$ oraz $y \in Y$ to mówimy, że V jest* ***sumą prostą*** *podprzestrzeni X, Y, ozn. $V = X \oplus Y$.*

Przykład 1. Zgodnie z opisem poczynionym wyżej mamy: $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1, 1) \oplus \mathrm{lin}(1, -1)$.

Przykład 2. Każdy ciąg zbieżny o wyrazach rzeczywistych można w jednoznaczny sposób przedstawić jako sumę ciągu stałego i ciągu zbieżnego do 0. A zatem podprzestrzeń $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ złożona z ciągów zbieżnych jest sumą prostą podprzestrzeni złożonej z ciągów stałych (jednowymiarowa) i podprzestrzeni $\mathcal{C}_0$ złożonej z ciągów zbieżnych do zera (nieskończenie wymiarowa – dlaczego?).

Kolejny przykład pochodzi z przestrzeni macierzy. Poprzedzimy go istotnymi definicjami.

Definicja 3. *Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$. Macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$ nazwiemy* ***macierzą transponowaną*** *do macierzy A, ozn. A^T, jeśli*

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Macierz kwadratową $M \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy:

- ***symetryczną****, jeśli $M = M^T$,*
- ***antysymetryczną****, jeśli $M = -M^T$.*

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Przykład 3. Podzbiory macierzy symetrycznych i antysymetrycznych w $M_{n\times n}(K)$ są podprzestrzeniami i dla ciała charakterystyki[1] $\neq 2$ ich suma to całe $M_{n\times n}(K)$. Dla każdego $M \in M_{n\times n}(K)$ mamy bowiem:

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}.$$

Kolejny przykład zaczerpniemy z przestrzeni funkcji rzeczywistych.

Przykład 4. Każdą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej, bo mamy rozkład:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dlaczego rozkłady przedstawione z Przykładach 3 i 4 są jednoznaczne i uzyskane sumy podprzestrzeni są sumami prostymi? Dowód opiera się o następującą ogólną obserwację.

Uwaga 3. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:*

- $V = V_1 \oplus V_2$,
- $V = V_1 + V_2$ *i* $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $V = V_1 \oplus V_2$. Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, więc $V = V_1 + V_2$. Gdyby $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, to istniałby niezerowy wektor $\alpha \in V_1 \cap V_2$. Co więcej, można by było przedstawić ten wektor na dwa sposoby jako sumę wektora z V_1 i V_2, mianowicie: $\alpha = \alpha + 0 = 0 + \alpha$. Jest to sprzeczne z jednoznacznością w definicji sumy prostej.

Na odwrót: przypuśćmy, że $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Musimy wykazać, że każdy wektor $\alpha \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako suma wektora z V_1 i wektora z V_2. Z równości $V = V_1 + V_2$ wynika, że istnieją $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$ spełniające $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Gdyby to przedstawienie nie było jednoznaczne, to zachodziłoby równanie $\alpha = \alpha_1' + \alpha_2'$, dla pewnych $\alpha_1' \in V_1$, $\alpha_2' \in V_2$, przy czym $\alpha_1 \neq \alpha_1'$ (równoważnie: $\alpha_2 \neq \alpha_2'$). Wtedy jednak $0 \neq \alpha_1 - \alpha_1' = \alpha_2' - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2$, co jest sprzeczne z $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. □

Poniższy wniosek odnosi się bezpośrednio do formuły Grassmanna.

Wniosek 1. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- $V = V_1 \oplus V_2$,
- $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$,
- *jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą V_1 oraz $\mathcal{B}$ jest bazą V_2, to $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest bazą V.*

* * *

Uwaga – w tym miejscu kończy się materiał obowiązujący na kolokwium pierwszym.

[1]Przypomnienie: ciało ma charakterystykę p jeśli $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$. Charakterystyka może być liczbą pierwszą lub zerem.

Definicja 4. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy* ***przekształceniem liniowym****, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:*

(i) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(ii) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$. *(W szczególności: $\phi(0_V) = 0_W$, czyli zero przechodzi w zero.)*

Zwróćmy uwagę na to, że w powyższych warunkach z lewej strony mamy do czynienia z dodawaniem i mnożeniem w przestrzeni V, a po prawej – z dodawaniem i mnożeniem w przestrzeni W.

Kilka przykładów przekształceń liniowych (zachęcam do sprawdzenia)

(a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci $\phi((a, b)) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$,

(b) $\phi : F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ przyporządkowujące funkcji f funkcję parzystą $\phi(f)$ daną wzorem

$$(\phi(f))(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

(c) $\phi : M_{n\times n}(K) \to M_{n\times n}(K)$ przyporządkowujące macierzy M macierz symetryczną $\phi(M)$:

$$\frac{M + M^T}{2}.$$

(d) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$, czyli **obrót** o kąt θ.

(e) Odwzorowanie $d : K[x] \to K[x]$, zwane **pochodną**, zadane wzorem

$$\phi(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

(f) Odwzorowanie $tr : M_{n\times n}(K) \to K$ przypisujące macierzy $A = (a_{ij})$ sumę elementów na przekątnej $a_{11} + \ldots + a_{nn}$, zwane **śladem**.

(g) Przekształcenie $\phi : K^\infty \to K^\infty$ dane wzorem $\phi(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

(h) Niech $(\mathbb{R}_+, \boxplus, \boxtimes, 1)$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, gdzie $x \boxplus y = xy$ oraz $a \boxtimes x = x^a$, dla $a \in \mathbb{R}$. Przekształcenie $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dane wzorem $l(x) = \ln(x)$ jest liniowe.

Kilka ogólnych przykładów i związane z nimi nazewnictwo:

- Przekształcenie $\phi : V \to W$ nazwiemy **zerowym**, jeśli dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Przekształcenie $\phi : V \to W$ nazwiemy **identycznością**, jeśli dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \alpha$.
- Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie dane wzorem $f(\alpha) = a\alpha$ nazywamy **homotetią** (albo jednokładnością) o skali a.
- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to dla każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Definiujemy:
  - **rzut** $\phi : V \to V$ przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2 dany wzorem $\phi(\alpha) = \alpha_1$.
  - **symetrię** $\psi : V \to V$ przestrzeni V względem V_1 wzdłuż V_2 daną wzorem $\psi(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2$.

Pojęcie rzutu jest niezwykle istotne z punktu widzenia rozkładów na sumy proste. Zauważmy, że przekształcenia (a), (b), (c) są rzutami. Również homotetie mają ważne znaczenie przy badaniu przekształceń. Rozważmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1, 2x_2, 4x_3).$$

Z geometrycznego punktu widzenia przekształcenie to nie jest ani obrotem, ani symetrią czy rzutem, ale biorąc rozkład:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \oplus \mathrm{lin}(0, 0, 1) \qquad (*)$$

widzimy, że ϕ ograniczone do każdego ze składników jest na nim homotetią, bo:

- dla każdego $v \in \mathrm{lin}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ mamy $\phi(v) = 2v$,
- dla każdego $w \in \mathrm{lin}((0, 0, 1))$ mamy $\phi(w) = 4w$.

Idea jest zatem następująca: znając ϕ na każdym ze składników prostych, „wiemy co robi” ϕ na całej przestrzeni liniowej! To nie przypadek, ale zwiastun wielkiej i ważnej teorii, którą zajmiemy się w kolejnym semestrze. Kluczową kwestią jest wskazywanie rozkładów takich, jak $(*)$, dla innych przekształceń liniowych. Na razie jednak zajmiemy się zbudowaniem podstaw, zwłaszcza opisem przekształceń liniowych pomiędzy przestrzeniami skończonego wymiaru w języku macierzowym.

Uzupełnienie. Operacje na dowolnych rodzinach podprzestrzeni

Poniższy materiał pojawił się na wykładzie, jednak z uwagi na szkicowe jego przedstawienie i śladową obecność w skrypcie zamieszczamy go jako uzupełnienie. Zawiera on jedynie niezbędne definicje uogólniające pojęcie sumy i iloczynu podprzestrzeni, a także pojęcie sumy prostej. Wyjściowa sytuacja jest następująca: dana jest rodzina podprzestrzeni $\{V_t\}_{t\in T}$ przestrzeni V, gdzie T może być zbiorem nieskończonym (np. zbiorem liczb naturalnych lub rzeczywistych). Interesuje nas znalezienie najmniejszej podprzestrzeni V, której podprzestrzeniami są wszystkie elementy rozważanej rodziny oraz znalezienie największej podprzestrzeni, będącej jednocześnie podprzestrzenią wszystkich podprzestrzeni należących do rozważanej rodziny.

Definicja 5. *Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas określamy zbiór*

$$\sum_{t\in T} V_i = \{\alpha_{t_1} + \ldots + \alpha_{t_r} | \alpha_{t_i} \in V_{t_i}, t_1, \ldots, t_r \in T, r \in \mathbb{N}\},$$

*zwany **sumą rodziny podprzestrzeni** $\{V_t\}_{t\in T}$. W przypadku $T = \{1, \ldots, n\}$ piszemy:*

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + \ldots + V_n.$$

Przykłady:

- $K[x] = \sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\leqslant n}[x]$.
- $\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0)) + \mathrm{lin}((1,0,0),(1,1,0)) + \mathrm{lin}((1,1,0),(0,1,0))$.
- Przestrzeń $\mathrm{lin}((1,0,1),(1,0,2)) \subseteq \mathbb{R}^3$ jest sumą rodziny podprzestrzeni indeksowanej (na przykład) liczbami niewymiernymi postaci:

$$V_t = \mathrm{lin}(1,0,t), \quad t \in T = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Uwaga 4. *Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas*

$$\sum_{t\in T} V_i = \mathrm{lin}\left(\bigcup_{t\in T} V_t\right).$$

W szczególności, suma rodziny podprzestrzeni V jest podprzestrzenią V. Jest to najmniejsza podprzestrzeń w V zawierająca wszystkie $\{V_t\}_{t\in T}$.

Definicja 6. *Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas podprzestrzeń*

$$\bigcap_{t\in T} V_t$$

*nazywamy **iloczynem, przecięciem** lub **częścią wspólną** rodziny $\{V_t\}_{t\in T}$.*

Rozważmy następujący przykład: niech $V_{[0,1]} \subseteq F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ będzie podprzestrzenią złożoną ze wszystkich funkcji, które przyjmują wartość zero na zbiorze $[0,1]$. Rozważmy też, dla $x \in [0,1]$, podprzestrzenie $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ postaci $V_x = \{f \in F(R,R) : f(x) = 0\}$. Wówczas:

$$V_{[0,1]} = \bigcap_{x\in[0,1]} V_x$$

Czytelnik znający zasadę włączeń i wyłączeń, pozwalającą wyznaczyć moc sumy skończenie wielu zbiorów skończonych, patrząc na formułę Grassmanna może dojść do przekonania, że zachodzić musi jej uogólnienie na przypadek wymiaru sumy trzech lub więcej składników. Jest to niestety nieprawda. W szczególności, jeśli V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami V, to $\dim(V_1 + V_2 + V_3)$ nie jest równy:

$$\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3),$$

Czytelnik zechce sprawdzić to dla $V_t = \mathrm{lin}(1,t)$, gdzie $t = 0, 1, 2$. Prawidłowe uogólnienie formuły Grassmanna nie jest proste, o ile suma podprzestrzeni nie spełnia jakiegoś dodatkowego warunku. Najistotniejszym przykładem takiego warunku jest oczywiście bycie sumą prostą. Co to oznacza?

Definicja 7. *Mówimy, że przestrzeń V jest* ***sumą prostą rodziny podprzestrzeni*** $\{V_t\}_{t\in T}$ *jeśli każdy wektor $\alpha \in V$ daje się przedstawić jednoznacznie jako suma*

$$\alpha_{t_1} + \ldots + \alpha_{t_r},$$

gdzie $\alpha_{t_i} \in V_{t_i}$, dla pewnych parami różnych $t_i \in T$. Wówczas piszemy:

$$V = \bigoplus_{t\in T} V_t,$$

a w przypadku, gdy $T = \{1, \ldots, n\}$ po prostu

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n.$$

Przykłady (zachęcam do samodzielnego uzasadnienia):

- $\mathbb{R}^4 = \mathrm{lin}(1,0,0,0) \oplus \mathrm{lin}(0,1,0,0) \oplus \mathrm{lin}((1,1,1,0),(0,0,0,1))$.
- Jeśli $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to:
$$V = \mathrm{lin}(\alpha_1) \oplus \mathrm{lin}(\alpha_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{lin}(\alpha_n).$$
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą V oraz $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n$ jest rozbiciem $\mathcal{A}$ na parami rozłączne podzbiory, to:
$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{lin}(\mathcal{A}_i).$$

Jak się okazuje, jeśli przestrzeń skończenie wymiarowa V spełnia $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, to

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

Dowód wymaga uzasadnienia następującej obserwacji.

Uwaga 5. *Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $V = \bigoplus_{t\in T} V_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \sum_{t\in T} V_t$ oraz dla każdych $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$ zachodzi:*

$$V_{t_0} \cap \sum_{i=1}^{k} V_{t_i} = \{0\}.$$

W szczególności aby suma algebraiczna była sumą prostą $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ nie wystarczy, aby mieć

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{oraz} \quad V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}.$$

Dla przykładu weźmy podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$ postaci:

$$V_1 = \mathrm{lin}(1,0), \quad V_2 = \mathrm{lin}(1,1), \quad V_3 = \mathrm{lin}(0,1).$$

Właściwe uogólnienie Uwagi 3 wymaga zastąpienia warunku $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ układem warunków:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}, \quad V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{0\}, \quad V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}.$$

Rozkłady na sumy proste mają wielkie znaczenie dla lepszego zrozumienia wykładu w drugim semestrze, choć nie są one, z uwagi na brak miejsca i godzin wykładowych, szerzej omówione w skrypcie, na którym się opieramy. Nietrudno się o tym przekonać próbując uogólnić przykład podany na zakończenie zasadniczej części wykładu. Gdy zapoznamy się (a zajmie nam to pozostałą część semestru) z językiem niezbędnym do badania przekształceń liniowych (zarówno macierzowym, jak i szkicowo – diagramowym), wówczas przyjdzie czas na badanie niezmienników przekształceń liniowych. Wiele z nich łatwiej będzie zrozumieć wiążąc z przekształceniami liniowymi rozkłady na sumy proste, związane z tzw. przestrzeniami niezmienniczymi. Póki co zajmiemy się jednak inną ważną strukturą związaną z podprzestrzeniami.

Dodatek. Wstęp do przestrzeni ilorazowych

Kończymy wstępne rozważania nad strukturą przestrzeni liniowych. W dodatku tym omówimy, na razie na bardzo elementarnym poziomie, strukturę zwaną przestrzenią ilorazową. O czym mowa? Zacznijmy od prostej sytuacji w $\mathbb{R}^3$ i od układu złożonego z dwóch równań postaci:

$$\begin{cases} x_1 & = a, \\ x_2 + x_3 & = b. \end{cases}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są parametrami. Zbiór rozwiązań tego układu to zbiór

$$\{(a, b-s, s), s \in \mathbb{R}\}.$$

W języku twierdzenia Kroneckera-Capellego jest to zbiór $(a, b, 0) + \mathrm{lin}((0, -1, 1))$, gdzie $W = \mathrm{lin}(0, -1, 1)$ jest przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań (o trzech niewiadomych) $x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0$.

Popatrzmy na uzyskane zbiory rozwiązań, dla różnych a, b. Geometrycznie można o nich myśleć jak o prostych przechodzących przez punkt $(a, b, 0)$ i równoległych do prostej o wektorze kierunkowym $(0, -1, 1)$. Załóżmy, że interesuje nas geometria nie całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, ale właśnie tych różnych prostych. Każda z nich opisana jest wektorem $(a, b, 0)$ i w tym sensie każdą z nich można traktować jako wektor! Co więcej, dlaczego by nie dodawać tych prostych? Ich „suma”, czyli $(a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0)$ to prosta przechodząca przez $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0)$ równoległa do $\mathrm{lin}(0, -1, 1)$. A zatem na zbiorze różnych zbiorów rozwiązań układów niejednorodnych, o jednym i tym samym układzie jednorodnym, można jak się wydaje wprowadzić pojęcie przestrzeni liniowej. Poświęćmy kilka uwag pojęciom znajdującym się dookoła tej idei.

Definicja 8. *Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Powiemy, że układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest* ***liniowo niezależny modulo*** *U, jeśli dla $a_1, \ldots, a_n \in K$ mamy*

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in U \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Powiemy, że układ liniowo niezależny modulo U jest ***bazą*** *V* ***modulo*** *U, jeśli jest maksymalnym liniowo niezależnym układem modulo U.*

Oczywiście liniowa niezależność układu modulo podprzestrzeń zerowa jest zwykłą liniową niezależnością rozważaną na wykładzie. Co więcej, jeśli $U' \subseteq U$ jest podprzestrzenią, to układ wektorów jest liniowo niezależny modulo U tylko wtedy, gdy jest liniowo niezależny modulo U'. W szczególności każdy układ liniowo niezależny modulo U jest układem liniowo niezależnym w V w myśl definicji z wykładu czwartego.

Przykład 1. Niech $V = \mathbb{R}^4$ oraz

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Wówczas przykładem bazy przestrzeni V modulo U jest np. para wektorów

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Dlaczego? Zauważmy, że jeśli liniowa kombinacja $av_1 + bv_2 = (a, b, 0, 0)$ należy do U, to musi spełniać obydwa równania $x_1 + 2x_4 = 0$ oraz $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$, czyli $a = 0$ oraz $a + 2b = 0$, co daje oczywiście $a = b = 0$, A zatem $\{v_1, v_2\}$ to układ liniowo niezależny modulo U. Dlaczego jest to układ maksymalny? Gdyby dało się go rozszerzyć przy pomocy wektora v_3, to warunek $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \in U$ oraz $v_1, v_2 \notin U$ implikują $v_3 \in U$, co daje sprzeczność z liniową niezależnością układu $\{v_1, v_2, v_3\}$ modulo U, bowiem można przyjąć $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$.

Czy Czytelnik widzi, że dla każdego układu niejednorodnego, któremu odpowiada układ jednorodny o zbiorze rozwiązań U istnieją $a, b \in K$, że $(av_1 + bv_2) + U$ jest zbiorem rozwiązań tego układu niejednorodnego? Zbiory $(1, 0, 0, 0) + U$ oraz $(0, 1, 0, 0) + U$ to rozwiązania odpowiednio układów postaci:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_4 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = 2. \end{cases}.$$

Podkreślmy raz jeszcze: wektory $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ są rozwiązaniami układów niejednorodnych, wiec nie mogą należeć do U, które jest zbiorem rozwiązań odpowiadającego tym układom układu jednorodnego!

Przykład 2. Niech $X = \mathbb{R}[x]$ oraz

$$U = \{f \in X : f(0) = f(1) = 0\}, \qquad V = \{f \in X : f(0) = f(1)\}.$$

Dokonujemy tu cichego utożsamienia funkcji wielomianowych nad $\mathbb{R}$ z wielomianami. Z uwagi na to, że ciało $\mathbb{R}$ jest nieskończone, jest to możliwe. Zarówno U, jak i W są oczywiście nieskończonego wymiaru. Istotnie, mają one postać:

$$U = \{x(x-1)f(x) : f \in K[x]\}, \quad V = \{a + x(x-1)f(x) : a \in \mathbb{R} \text{ oraz } f \in K[x]\}.$$

Układem liniowo niezależnym modulo U jest choćby $\{1, x\}$. Czy można go rozszerzyć? Jeśli tak, to wielomian rozszerzający ten układ musi być stopnia co najmniej drugiego (układ liniowo niezależny modulo U musi być liniowo niezależny, patrz komentarz wyżej). Jednak dla każdego wielomianu f stopnia większego niż 1 istnieje kombinacja liniowa $a_1 + a_2x + a_3f$ taka, że powstały wielomian jest podzielny przez $x(x-1)$. Zachęcam Czytelnika do wykazania takiej tezy.

Układy liniowo niezależne i bazy modulo podprzestrzeń są istotne z punktu widzenia sum prostych. Jeśli zastanawiamy się jak mogą wyglądać wszystkie możliwe bazy modulo podprzestrzeń, to okazuje się, że muszą to być bazy dopełnień prostych tej podprzestrzeni do całej przestrzeni Mówi o tym poniższa uwaga.

Uwaga 6. *Niech $U \subsetneq V$ i niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie układem liniowo niezależnym modulo U. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) układ $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą V modulo U,

(2) $U \oplus \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n) = V$.

Dowód. Pokażemy tezę jedynie w przypadku, gdy V jest skończenie wymiarowa, choć jest ona zawsze prawdziwa. Załóżmy (1) i niech $u_1, \ldots, u_m$ będzie bazą U. Nasza teza: $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ jest bazą V. Zacznijmy od liniowej niezależności tego układu. Weźmy $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$ takie, że:

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m = 0.$$

Wówczas $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = -(b_1u_1 + \ldots + b_mu_m) \in U$, a skoro $v_1, \ldots, v_n$ to układ liniowo niezależny modulo U, to $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Zatem w wypisanej wyżej kombinacji mamy tylko $b_1u_1 + \ldots + b_mu_m = 0$, co oznacza, ze $b_1 = \ldots = b_m = 0$, skoro $u_1, \ldots, u_m$ są bazą U. A zatem układ $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ jest liniowo niezależny. Pokażmy, że układ ten rozpina V. Weźmy $w \in V$. Twierdzimy mianowicie, ze istnieją $c_1, \ldots, c_n$ takie, że

$$w - c_1v_1 - \ldots - c_nv_n \in U.$$

W przeciwnym bowiem razie, układ $w, v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo niezależny modulo U. Istotnie, gdyby dla pewnych $d, d_1, \ldots, d_n \in K$, nie wszystkich równych zero było $dw + d_1v_1 + \ldots + d_nv_n \in U$, to albo $d \neq 0$ i wtedy $w - d_1v_1 + \ldots - d_nv_n \in U$, albo $d = 0$ i któryś z $d_i \neq 0$, co oznacza, że układ $v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo zależny modulo U, sprzeczność. A zatem, wbrew założeniu, że $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą V modulo U znaleźliśmy zawierający ją w sposób właściwy układ $w, v_1, \ldots, v_n$, również liniowo niezależny modulo U. A zatem istotnie istnieją $c_1, \ldots, c_n$ takie, że $w - c_1v_1 - \ldots - c_nv_n \in U$, czyli w jest kombinacją wektorów $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$.

Pokazaliśmy, że $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ jest bazą V. A zatem

$$U + \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{lin}(\operatorname{lin}(u_1, \ldots, u_m) \cup \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m)) = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m) = V$$

oraz oczywiście $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n) \cap \operatorname{lin}(u_1, \ldots, u_m) = 0$, bo jeśli jakiś wektor w należy do części wspólnej, to

$$w = e_1v_1 + \ldots + e_nv_n = f_1u_1 + \ldots + f_mu_m,$$

czyli $e_1v_1 + \ldots + e_nv_n - f_1u_1 + \ldots - f_mu_m = 0$, co wobec faktu, że $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ jest bazą V oznacza, że $e_1 = \ldots = e_n = f_1 = \ldots = f_m = 0$.

Pokazaliśmy zatem, że $U \oplus \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n) = V$. Dowód drugiej implikacji zostawiamy jako proste ćwiczenie. □

Widzimy zatem, że każda baza przestrzeni V modulo U odpowiada pewnemu dopełnieniu prostemu U do V, i odwrotnie. Konstrukcja przestrzeni ilorazowej wskazuje jeden „kanoniczny" obiekt, który będzie „izomorficzny" (identyczny, co do struktury – patrz kolejny wykład) z każdym z tych dopełnień.

Definicja 9. *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K i niech $\alpha \in V$. Zbiór*

$$\alpha + W = \{\alpha + \gamma \,|\, \gamma \in W\}$$

*nazywamy **warstwą podprzestrzeni** W w przestrzeni V.*

Warstwa jest, jak widzimy, abstrakcyjnym odpowiednikiem zbioru rozwiązań niejednorodnego układu równań. Celem jest, jak wspominaliśmy, wprowadzenie struktury przestrzeni liniowej na zbiorze warstw (tak, jak wprowadziliśmy ją w początkowym przykładzie na zbiorze prostych równoległych do danej).

Fundamentalne obserwacje dotyczące warstw zawarte są w następującej uwadze[2].

Uwaga 7. *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V.*

(i) $\alpha + W = \beta + W \iff \alpha - \beta \in W$,

(ii) Dla warstw $v + W$ oraz $v' + W$ określamy sumę warstw $+$ oraz iloczyn $\cdot$ skalara z ciała K przez warstwę:

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W, \quad a \cdot (v + W) = av + W.$$

Działania te są dobrze określone, tzn. jeśli $v + W = v' + W$, to dla każdego $v'' \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ mamy: $(v + W) + (v'' + W) = (v' + W) + (v'' + W)$ oraz $a \cdot (v + W) = a \cdot (v' + W)$.

(iii) zbiór $V/W = \{\alpha + W \,|\, \alpha \in V\}$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar określonymi wyżej oraz z warstwą $0 + W$ tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K,

(iv) Jeśli $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą W oraz $\mathcal{B} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ ma tę własność, że $\{y_1 + W, \ldots, y_m + W\}$ to baza V/W, wówczas $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ oraz $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest bazą V. W szczególności, jeśli V jest skończenie wymiarowa, to V/W również jest skończenie wymiarowa i

$$\dim V = \dim W + \dim(V/W).$$

Definicja 10. *Przestrzeń V/W określoną w poprzedniej uwadze nazywamy **przestrzenią ilorazową** przestrzeni V przez podprzestrzeń W.*

Dowód. Dowodzimy kolejne punkty.

- Zacznijmy od (i). Załóżmy, że $v + W = v' + W$. Skoro $v \in v + W$, to $v \in v' + W$. Stąd istnieje $w \in W$ takie, że $v = v' + w$. Stąd $v - v' \in W$.

  W drugą stronę, załóżmy, że $v - v' \in W$. Bez straty ogólności wystarczy pokazać, że $v \in v' + W$. Niech $w = v - v' \in W$. Wówczas $v = v' + w$, a stąd $v \in v' + W$, co pokazuje $v + W \subseteq v' + W$. Drugie zawieranie pokazujemy w sposób analogiczny.

- Dowodzimy (ii). Pokażmy, że dodawanie warstw jest dobrze zdefiniowane. Warunek jest symetryczny, więc wystarczy pokazać zawieranie $(v + W) + (v'' + W) \subseteq (v' + W) + (v'' + W)$. Niech:

$$u \in (v + W) + (v'' + W) = (v + v'') + W.$$

  Istnieje $w \in W$, że $u = (v + v'') + w$. Chcemy pokazać, że

$$u \in (v' + W) + (v'' + W) = (v' + w'') + W.$$

  Skoro $v + W = v' + W$, to mamy element $w' = v - v' \in V$. A zatem $v = v' + w'$. Stąd:

$$u = (u + v'') + w = ((v' + w') + v'') + w = (v' + v'') + (w' + w).$$

  A zatem rzeczywiście $u \in (v' + v'') + W$, skoro $w' + w \in W$. A zatem zbiory

$$(v + v'') + W, \quad (v' + v'') + W$$

  są równe, czyli dodawanie warstw jest dobrze określone.

[2] Dowód jest w zasadzie tłumaczeniem tekstu S. Caneza: *Notes on quotient spaces*, do wyszukania w Sieci.

Niech teraz $a \in K$. Aby pokazać, że mnożenie warstwy przez skalar jest dobrze określone, wystarczy pokazać, że: $a \cdot (v + W) \subseteq a \cdot (v' + W)$. Niech

$$u \in a \cdot (v + W) = av + W.$$

Mamy $u = av + w$, dla pewnego $w \in W$. Ponownie oznaczmy $w' = v - v' \in W$. Zatem:

$$u = av + w = a(v' + w') + w = av' + (aw' + w) \in av' + W,$$

bowiem $aw' + w \in W$, bo W jest podprzestrzenią. Zatem zbiory

$$a \cdot (v + W), \quad a \cdot (v' + W)$$

są równe i mnożenie warstwy przez skalar jest dobrze określone.

- Sprawdzenie, że V/W spełnia aksjomaty przestrzeni liniowej sprowadza się w większości przypadków (łączność, przemienność, rozdzielność) do skorzystania z tego, że V jest liniowa. Sprawdzimy jedynie istnienie elementu zerowego i przeciwnego.

  Twierdzimy, że $W = 0 + W$ jest zerem w V/W. Istotnie, niech $v + W \in V/W$. Wówczas:

  $$(v + W) + W = (v + 0) + W = v + W, \quad W + (v + W) = (0 + v) + W = v + W,$$

  co załatwia sprawę. Oczywiście biorąc $v + W \in V/W$ widzimy, że warstwą przeciwną jest $-v + W$.

- Dowód (iv) przypomina uzasadnienie Uwagi 6. Weźmy element v z bazy $\mathcal{A} \subset W$. Wówczas mamy $v+W = W$, czyli jest to warstwa zerowa. Nie może ona należeć do żadnej bazy V/W, czyli $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

  Pokażmy, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ rozpina V. Niech $v \in V$. Zatem $v + W \in V/W$ i istnieją skalary $t_1, \ldots, t_m$ takie, że

  $$v + W = t_1(y_1 + W) + \ldots + t_m(y_m + W) = (t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m) + W.$$

  Na mocy (i) mamy $v - t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m \in W$, a więc istnieją $s_1, \ldots, s_n$, że:

  $$v - t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m = s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n.$$

  Widzimy zatem, że $v \in \operatorname{lin}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

  Pokażmy wreszcie, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ to zbiór liniowo niezależny. Załóżmy, że dla pewnych $s_1, \ldots, s_n$ oraz $t_1, \ldots, t_m$ z ciała K mamy:

  $$s_1 v_1 + \ldots + s_n t_n + t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m = 0.$$

  Zatem $s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n = -(t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m) \in W$, a skoro $v_1, \ldots, v_n$ to baza W, dostajemy $s_1 = \ldots = s_n = 0$. A zatem mamy $t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m = 0$. To oznacza, że

  $$t_1(y_1 + W) + \ldots + t_m(y_m + W) = 0 + W.$$

  Ale $y_1 + W, \ldots, y_m + W$ to baza V/W, czyli $t_1 = \ldots = t_m = 0$, co kończy dowód.

□

Zachęcam Czytelnika do pokazania w analogiczny sposób wariantu tezy postawionej w (iv): jeśli $\mathcal{C}$ jest bazą V taką, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ jest bazą W, to układ $\{v + W, v \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}\}$ jest bazą V/W.

Czytelnik zechce zauważyć, że dwa przykłady rozważane wcześniej pokazują, że:

$$\mathbb{R}^4/U = \operatorname{lin}((1, 0, 0, 0) + U, (0, 1, 0, 0) + U),$$

gdzie $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}$, czyli $\dim \mathbb{R}^4/U = 2$. Również w drugim z rozważanych przykładów, czyli $X = \mathbb{R}[x]$ oraz $U = \{f \in X : f(0) = f(1) = 0\}$, $V = \{f \in X : f(0) = f(1)\}$ postulowaliśmy w istocie, że:

$$\dim X/U = 2, \quad \dim X/V = 1, \quad \dim V/U = 1.$$

Na tym zakończymy w tym momencie rozważania o przestrzeniach ilorazowych. Wrócimy do nich wkrótce, gdy zdobędziemy więcej wiedzy na temat przekształceń liniowych. Zakończmy następującą definicją.

Definicja 11. *Niech $U \subseteq V$. Liczbę*

$$\operatorname{codim} U := \dim V/U$$

*nazywamy **kowymiarem** przestrzeni U.*