Wymiar przestrzeni liniowej. Rząd macierzy

Ostatnia aktualizacja: 8.11.2021 r.

Na ostatnim wykładzie wprowadzone zostało pojęcie liniowej niezależności układu wektorów w przestrzeni liniowej. Pojęcie to wiąże się, jak widzieliśmy, z problemem wyznaczania minimalnego układu wektorów rozpinającego podprzestrzeń. Zdefiniowaliśmy pojęcie bazy przestrzeni liniowej. Dla przestrzeni liniowych, które można przedstawić w postaci $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, dla pewnego układu $\beta_1, \ldots, \beta_n$ wektorów w V pokazaliśmy, że istnieje podukład liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ taki, że $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Dziś pokażemy, że dla przestrzeni rozpiętych na skończonym układzie wektorów każde dwie bazy są równoliczne. Pozwoli to na określenie pojęcia wymiaru przestrzeni liniowej oraz wyróżnienia klasy przestrzeni liniowych nazywanych skończenie wymiarowymi.

Ostatnio pokazaliśmy, że jeśli układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_m$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest liniowo zależny, to znaczy: jeśli dla pewnych $b_1, \ldots, b_m \in K$, nie wszystkich równych zero, mamy:

$$b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m = 0,$$

to (co najmniej) jeden z elementów tego układu jest liniową kombinacją pozostałych. Fakt ten przywoływać będziemy dziś często jako „uwagę z poprzedniego wykładu”. Szczególnie ważna sytuacja występuje w przypadku gdy wiemy, że część z wektorów rozważanego układu stanowi układ liniowo niezależny.

Uwaga 1. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\beta \in V$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

Dowód. Jeśli $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny na mocy uwagi z poprzedniego wykładu. Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny. Istnieją wówczas $b, a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, spełniające $b\beta + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. $b = 0$. Wówczas $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, przy czym pewne a_i jest niezerowe, co przeczy liniowej niezależności układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- Przypadek 2. $b \neq 0$. Mamy $\alpha = -\frac{a_1}{b}\alpha_1 - \ldots - \frac{a_k}{b}\alpha_k$, czyli $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

□

Definicja 1. *Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V jest*

- ***maksymalnym układem liniowo niezależnym,*** *jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i każdy większy układ – to znaczy taki układ wektorów przestrzeni V, który zawiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jako podukład właściwy – jest liniowo zależny,*
- ***minimalnym układem rozpinającym*** *V, jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V i żaden mniejszy układ – to znaczy żaden podukład właściwy układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie rozpina V.*

Przykłady.

- Układ $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ nie jest maksymalnym układem liniowo niezależnym $\mathbb{R}^3$. Jest to bowiem podukład właściwy układu liniowo niezależnego $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.
- Układ $(1, 0, 0), (2, 0, 0)$ nie jest minimalnym układem rozpinającym $V = \mathrm{lin}((1, 0, 0), (2, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^3$, bo układ $(1, 0, 0)$ jest jego podukładem właściwym i $V = \mathrm{lin}((1, 0, 0))$.

Twierdzenie 1. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Następujące warunki są równoważne.*

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *jest bazą przestrzeni V,*

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,*

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *jest minimalnym układem rozpinającym V.*

Dowód. Zaczniemy od implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V. Gdyby układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ byłby liniowo niezależny. Wówczas jednak, zgodnie z Uwagą 1, α nie może należeć do $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. To jest jednak niemożliwe, bo $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zgodnie z definicją bazy. Zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym niezależnym liniowo układem w V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$. Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny. Do pokazania, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Jednak z maksymalności tego układu wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny. W szczególności z Uwagi 1 wynika, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. A zatem istotnie $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V. Gdyby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy rozpinający V. Weźmy jednak dowolny wektor spośród $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie należący do tego podukładu. Jest on kombinacją podukładu, bo podukład ten rozpina (ponoć) przestrzeń V. Daje to sprzeczność z liniową niezależnością układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód implikacji $(iii) \Rightarrow (i)$. Mamy minimalny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpinający przestrzeń V. Pokażemy, że jest on bazą tej przestrzeni. Wystarczy pokazać liniową niezależność tego układu. Gdyby układ ten był liniowo zależny, to któryś z $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ byłby liniową kombinacją pozostałych. Np. (po ewentualnym przenumerowaniu) $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$. Wówczas jednak $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, bo dla dowolnego $\alpha \in V$:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \\ &= a_1\alpha_! + \ldots + a_k\underbrace{(b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1})}_{\alpha_k} = \\ &= (a_1 + a_kb_1)\alpha_1 + \ldots + (a_{k-1} + a_kb_{k-1})\alpha_{k-1}.\end{aligned}$$

Jest to jednak sprzeczne z założeniem, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V. A zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny. □

Czas na rezultat prowadzący w kierunku twierdzenia o istnieniu wymiaru przestrzeni liniowej.

Twierdzenie 2 (Steinitz (1910))**.** *Jeśli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżących w przestrzeni*

$$V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

jest liniowo niezależny, to:

(a) $k \leqslant m$*,*

(b) z układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ można wybrać taki podukład $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}$, że:

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Twierdzenie powyższe mówi o tym, że liczność rozpinających układów liniowo niezależnych respektuje porządek wyznaczony przez inkluzję. Jeśli układ k wektorów rozpina przestrzeń liniową, to nie można w niej „zmieścić” układu złożonego z więcej niż k liniowo niezależnych wektorów (punkt (a)). Co więcej, odpowiedni fragment dowolnego układu rozpinającego daną przestrzeń liniową można zastąpić dowolnym równolicznym układem liniowo niezależnym zawartym w tej przestrzeni (punkt (b)). Stąd też rezultat ten nazywa się w wielu źródłach **twierdzeniem o wymianie**.

Dowód. Pokazujemy najpierw punkt (a). Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli niezerowe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\mathrm{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, gdzie $a_1, \ldots, a_k$ to niezerowe elementy K, zaś układ

$$a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$$

jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.

Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni liniowej $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Po ewentualnym przenumerowaniu[1] $\beta_1, \ldots, \beta_m$ weźmy takie a_{ij}, dla $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m$, że $a_{11} \neq 0$ oraz:

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m,$$
$$\ldots$$
$$\alpha_k = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \ldots + a_{km}\beta_m.$$

Teraz **poprawiamy** podukład $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ układu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ do takiego układu $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$, który jest rozpięty tylko przez $\beta_2, \ldots, \beta_m$. Dokładniej, określamy dla $i = 2, 3, \ldots, k$ określamy układ wektorów $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \subseteq \text{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$:

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\alpha_1 = \underbrace{\boldsymbol{a_{i1}}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{im}\beta_m}_{\alpha_i} - \frac{\boldsymbol{a_{i1}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\underbrace{(\boldsymbol{a_{11}}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m)}_{\alpha_1}.$$

Nowy układ składa się z $k-1$ wektorów i każdy jest rzeczywiście kombinacją jedynie wektorów postaci $\beta_2, \ldots, \beta_m$ (po powyższym rozpisaniu γ_i przy β_1 stoi 0). Przekonajmy się natomiast, że wektory $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ są liniowo niezależne. Istotnie, gdybyśmy dla pewnych $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkich równych 0, mieli:

$$c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0 \Leftrightarrow c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\alpha_1\right) = 0,$$

czyli równoważnie:

$$-\frac{c_2a_{21} + c_3a_{31} + \ldots + c_ka_{k1}}{a_{11}}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = 0.$$

Skoro jednak układ $c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$, sprzeczność. Zatem układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.

Podsumujmy: układ $k-1$ liniowo niezależnych wektorów $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ zawarty jest w przestrzeni rozpiętej przez $m-1$ wektorów postaci $\text{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$. Z założenia indukcyjnego mamy więc $k-1 \leqslant m-1$. A zatem $k \leqslant m$.

Dowodzimy punkt (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$$

jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a) takie s istnieje). Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w uwadze z poprzedniego wykładu, dla każdego $1 \leqslant j \leqslant m$, dłuższy układ wektorów

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$$

jest liniowo zależny. Na mocy Uwagi 1 mamy zatem:

$$\beta_j \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

W szczególności

$$\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

Oczywiście wszystkie α_i są kombinacjami liniowymi β_j więc

$$\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

Z udowodnionego już punktu (a) wynika, że

$$k + s \leqslant m,$$

a więc

$$s \leqslant m - k.$$

Stąd dołączając do układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ byle jakie $m-k-s$ wektorów $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-k-s}$ spośród β_i, dla $i \neq i_1, \ldots, i_s$, otrzymujemy układ spełniający

$$\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-k-s}).$$

□

[1] Czy Czytelnik widzi, dlaczego? W układzie liniowo niezależnym żaden wektor nie może być zerowy, czyli $\alpha_1 \neq 0$.

Wniosek 1. *(O liczbie wektorów rozpinających podprzestrzeń)*

(a) *Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leqslant m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.*

(b) *Jeśli $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)$ i układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są liniowo niezależne, to $k = l$.*

Dowód. Weźmy najdłuższy liniowo niezależny układ w W (to ma sens, bo wszystkie mają długość $\leqslant m$). Niech to będzie układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że:

$$W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Dowodzimy, że mają miejsce dwie inkluzje. Jedna z nich: $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$, jest oczywista, bo skoro wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ należą do W, to każda ich kombinacja liniowa też (bo W to podprzestrzeń). Dowodzimy teraz, że: $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \supseteq W$. Weźmy dowolny wektor $\alpha \in W$. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest dłuższy niż układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, więc jest liniowo zależny. Ponownie korzystamy z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w dowodzie uwagi z poprzedniego wykładu, otrzymując $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Wobec dowolności α otrzymujemy drugą inkluzję.

Dowód (b). Skoro $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)$ i układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są liniowo niezależne, to wobec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)$ mamy $k \leqslant l$. Z drugiej strony mamy przecież także symetryczne należenie: $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, czyli z twierdzenia Steinitza: $l \leqslant k$. A zatem $k = l$. □

Twierdzenie 3. *Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.*

Dowód. Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V, to $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l) = V$. Układy te są liniowo niezależne, a zatem na mocy Wniosku mamy $k = l$. □

Definicja 2. *Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n* ***wymiarowa****, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas*

$$\dim V = n$$

i liczbę n nazywamy ***wymiarem przestrzeni*** *V. Przyjmujemy też $\dim\{0\} = 0$. Mówimy, że przestrzeń V jest* ***skończenie wymiarowa****, jeśli V jest n wymiarowa dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa, to V nazywamy* ***nieskończenie wymiarową*** *i piszemy $\dim V = \infty$.*

Podajmy kilka ważnych przykładów.

- Oczywiście
$$\dim K^n = n,$$
o czym świadczy choćby baza standardowa.

- Jeśli $V = M_{m\times n}(K)$, to baza przestrzeni V złożona jest (na przykład) z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe. Nietrudno zatem widzieć, że
$$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n.$$

- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Wówczas $\dim(V) = 2$, bo V ma bazę postaci $\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

- Dla każdego n układ n wektorów $x, x^2, \ldots, x^n$ przestrzeni $K[x]$ jest liniowo niezależny. A zatem przestrzeń ta nie może być skończenie wymiarowa. Gdyby jej wymiar wynosił k, to na mocy twierdzenia Steinitza każdy układ liniowo niezależny w $K[x]$ musiałby liczyć nie więcej niż k wektorów. A zatem $\dim K[x] = \infty$. Podobnie nietrudno pokazać, że $\dim K^\infty = \infty$.

Twierdzenie 4. *Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leqslant n$.*

Dowód. Niech $W \subseteq V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ dla pewnego układu liniowo niezależnego $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ na mocy wniosku. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni W, więc W jest skończenie wymiarowa. Jeśli $\dim V = n$, to dla każdej bazy $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ przestrzeni V układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest zawartym w $\mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, a więc $k \leqslant n$, z twierdzenia Steinitza. □

Twierdzenie 5. *Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Wówczas:*

(a) *Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V,*

(b) *Z każdego układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpinającego V można wybrać bazę podprzestrzeni V,*

(c) *Jeśli $\dim(V) = k$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni K.*

(d) *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas $\dim W \leqslant \dim V$. Przy tym jeśli zachodzi $\dim W = \dim V$, to $W = V$.*

Dowód. Ćwiczenie.

Twierdzenie 6. *Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech:*

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, *gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,*
- $w(B) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, *gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.*

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = w(B)}$. *Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.*

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 8}(\mathbb{R}).$$

- $w(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,0,1,1,2,3,1,2),(4,1,3,1,0,0,1,1))) = 2,$
- $k(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,4),(0,1),(1,3),(1,1),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1))) = 2.$

Dowód. Przypomnijmy, że jeśli $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz jeśli $A' \in M_{m\times n}(K)$ jest macierzą schodkową otrzymaną z A elementarnymi operacjami na wierszach oraz $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ to wszystkie niezerowe wiersze macierzy A', wówczas:

(i) $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$,

(ii) $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ jest bazą przestrzeni rozpiętej przez wiersze macierzy A.

Widzimy zatem, że $w(A) = r$. Załóżmy, że w macierzy schodkowej A' pierwsze niezerowe wyrazy w wierszach $\alpha_1', \ldots, \alpha_r{}'$ znajdują się odpowiednio w kolumnach o indeksach:

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_r{}'.$$

Pokażemy, że $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ stanowią bazę $\operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. A zatem trzeba dowieść, że wektory te są liniowo niezależne oraz, że rozpinają podprzestrzeń kolumnową macierzy A.

Załóżmy, że istnieją $a_1, \ldots, a_r \in K$, że:

$$a_1\beta_{s_1} + \ldots + a_r\beta_{s_r} = 0.$$

Zobaczmy, że jeśli $\beta_{s_1}', \ldots, \beta_{s_r}'$ powstają z $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ przez wykonanie elementarnej operacji σ na wierszach A

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{bmatrix} \beta_1' & \cdots & \beta_n' \end{bmatrix}$$

to

$$a_1\beta_{s_1}' + \ldots + a_r\beta_{s_r}' = 0.$$

Czy to widać? Przy operacji elementarnej następuje albo zamiana współrzędnych wszystkich powyższych wektorów, albo przemnożenie współrzędnych każdego z powyższych wektorów przez stałą, albo dodanie do współrzędnych o numerze j współrzędnych o numerze i przemnożonych przez stałą. Ilustracja (dodanie do j-tego wiersza i-tego przemnożonego przez a):

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ \color{red}{b_{s_1 i}} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} + a \cdot \color{red}{b_{s_1 i}} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ \color{red}{b_{s_r i}} \\ \vdots \\ b_{s_r j} + a \cdot \color{red}{b_{s_r i}} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \color{red}{0} \\ \vdots \\ 0 + a \cdot \color{red}{0} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wniosek: układ $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta'_{s_1}, \ldots, \beta'_{s_r}$ jest liniowo niezależny. A zatem wykonujemy operacje elementarne na wierszach A aż dostaniemy postać schodkową zredukowaną A''.

I teraz **kluczowy argument** całego rozumowania: kolumna s_i-ta β''_{s_i} macierzy zredukowanej A'' to i-ty wektor bazy standardowej ϵ_i przestrzeni K^m, czyli $a_1\epsilon_1 + \cdots + a_r\epsilon_r = 0$ Stąd $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$. A zatem $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ to układ liniowo niezależny. Czy jest to układ rozpinający $\operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$?

Niech β będzie dowolną kolumną macierzy A. Szukamy $a_1, \ldots, a_r$ takich, że $a_1\beta_{s_1} + \ldots + a_r\beta_{s_r} = \beta$. Dostajemy układ równań liniowych o macierzy rozszerzonej:

$$U = \begin{bmatrix} \beta_{s_1} & \cdots & \beta_{s_r} & | & \beta \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Sprowadzenie macierzy U do postaci zredukowanej U'' odbywa się przy pomocy tych samych operacji, które sprowadzają A do A'', a więc pierwsze r kolumn U'' to pierwsze r wektorów bazy standardowej.

$$\begin{bmatrix} \beta_{s_1} & \cdots & \beta_{s_r} & | & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_r & | & \beta'' \end{bmatrix} = U''$$

Analogicznie jak w rozumowaniu wyżej mamy:

$$a_1\epsilon_1 + \cdots + a_r\epsilon_r = \beta''.$$

Ale β'' jest kolumną macierzy A'' (bo była kolumną A), więc ma tylko pierwsze r niezerowych współrzędnych, co oznacza, że układ $(*)$ ma rozwiązanie. □

Definicja 3. ***Rzędem macierzy*** *$A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:*

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Wniosek 2. *Wniosek z dowodu wyżej: rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.*

Przykłady:

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1, \quad r\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Na zakończenie omówmy jeszcze jeden przykład. Powiedzieliśmy, że wykonywanie operacji elementarnych na wierszach nie zmienia rzędu macierzy. Podobnie jest oczywiście z elementarnymi operacjami na kolumnach macierzy:

- dodaniem do kolumny innej kolumny pomnożonej przez stałą,
- zamianą kolumn,
- przemnożeniem kolumny przez niezerowy skalar.

Stosowanie obydwu typów operacji, zarówno wierszowych jak i kolumnowych, może uprościć wyznaczanie rzędu macierzy, jak w przykładzie poniżej.

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy (kolejno) wszystkie pozostałe wiersze:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Odejmujemy ostatnią kolumnę (kolejno) od każdej z pozostałych kolumn:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -n & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy macierz w postaci schodkowej, która ma dokładnie $n-1$ niezerowych wierszy. A zatem rząd wyjściowej macierzy A równy jest $n-1$.

Zebraliśmy cały szereg pojęć opisujących przestrzenie liniowe: kombinacje liniowe, układy liniowo niezależne, bazy, wymiar. Pojęcia te mają naturalnie interpretację geometryczną. Celem kolejnego wykładu będzie opisanie w nowo poznanym języku wszystkich podprzestrzeni przestrzeni K^n. Powrócimy także do języka początku wykładu i pokażemy czytelny związek pomiędzy rzędem macierzy układu równań, a liczbą zmiennych zależnych i niezależnych rozwiązania ogólnego tego układu. W języku rzędu sformułujemy także kryterium niesprzeczności układu równań liniowych.

Uzupełnienie. Rekurencje liniowe

Czy istnieje odpowiednik pojęcia jednorodnego układu równań liniowych w przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru? Choć często nie myślimy o tym w ten sposób – jest pojęcie bliskie tej intuicji.

Definicja 4. ***Liniowym jednorodnym równaniem rekurencyjnym rzędu*** *k (krócej: rekurencją rzędu k) o współczynnikach nad ciałem K nazywamy równanie postaci:*

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \ldots + c_k x_n, \tag{1}$$

gdzie $c_1, \ldots, c_k \in K$. Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest dowolny ciąg $(s_0, s_1, \ldots) \in K^\infty$ spełniający równości (1) dla każdego $n \geqslant 0$. Ciąg taki nazywamy ***ciągiem rekurencyjnym*** *rzędu k.*

Nie sposób opisać znaczenia rekurencji dla różnych działów matematyki, zwłaszcza dla matematyki dyskretnej, teorii funkcji tworzących, teorii szeregów (np. kryterium wymierności funkcji dającej się rozpisać w szereg), liniowych równań różniczkowych itd. ale nas rekurencje interesują jako swego rodzaju układy nieskończenie wielu jednorodnych równań o zmiennych ze zbioru $X = \{x_0, \ldots\}$, przy czym w każdym z równań występuje skończona (i jednakowa) liczba zmiennych. Oczywiście istnieją rekurencje niejednorodne, a także nieliniowe... (nazewnictwo jest tak samo bogate jak w równaniach różniczkowych).

Nietrudno uświadomić sobie, że zbiór rozwiązań rekurencji liniowej (1) tworzy podprzestrzeń liniową w K^∞. Jeśli ciągi $a = (a_1, a_2, \ldots)$ oraz $b = (b_1, b_2, \ldots)$ są rozwiązaniami (1), to także ciągi $a+b$ oraz λa są w sposób oczywisty jej rozwiązaniami, dla każdego $\gamma \in K$. Co ciekawego można powiedzieć o przestrzeni rozwiązań rekurencji rzędu k? Na ten temat można opowiedzieć kilka semestralnych wykładów, ale ograniczmy się do kilku uwag na temat najsłynniejszej zapewne rekurencji postaci:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Jednym z rozwiązań tej rekurencji jest słynny ciąg Fibonacciego. Wystarczy określić $s_0 = 0, s_1 = 1$. W istocie: każde rozwiązanie powyższej rekurencji jest wyznaczone jednoznacznie przez pierwsze dwa elementy. Naśladując język wprowadzony na pierwszym wykładzie: przez operacje elementarne na układzie zadanym przez rekurencję wszystkie równości sprowadzić można do równań postaci $x_m = f_m(s_0, s_1)$, gdzie f_m jest pewną liniową zależnością wiążącą s_0 i s_1. A więc s_0 i s_1 są parametrami w „rozwiązaniu ogólnym” tego układu. Wszystkie te intuicje można przerobić na formalne rozumowanie i pokazać, że wymiar podprzestrzeni W opisanej rekurencją $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ wynosi 2. Przykładowa baza W to

$$(0, 1, 1, 2, 3, ...), \quad (1, 0, 1, 1, 2, \ldots).$$

Jeden z jej elementów to oczywiście ciąg Fibonacciego. Zachodzi następujące twierdzenie, będące (przynajmniej intuicyjnie) uogólnieniem powyższych obserwacji.

Twierdzenie 7. *Zbiór rozwiązań rekurencji liniowej rzędu k ma wymiar k.*

Na koniec ładna obserwacja dotycząca ciągu Fibonacciego. Jak wiadomo ciąg ten można opisać ogólnym wzorem postaci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

To dość niezwykłe, że tak prosta rekurencja opisywalna jest w sposób jawny tak skomplikowanym wzorem. Czy aby na pewno skomplikowanym? Okazuje się, że jego pochodzenie można łatwo wyjaśnić narzędziami algebry liniowej, choć rozumowanie, które pokażę niżej można jeszcze zdecydowanie uprościć. Jak wiemy przestrzeń rozwiązań rekurencji $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ jest dwuwymiarowa i powyżej podaliśmy przykładową jej bazę. Ale może istnieje „ładniejsza” baza, pozwalająca opisywać elementy tej przestrzeni? Pomysł polega na poszukiwaniu bazy złożonej z ciągów postaci

$$\alpha = (a^0, a^1, a^2, \ldots), \quad \beta = (b^0, b^1, b^2, \ldots),$$

dla pewnych $a, b \in K$, które należą do W i są liniowo niezależne. Nie dla każdej rekurencji postaci (1) da się taką bazę znaleźć, ale w przypadku rozważanej przez nas rekurencji rzędu 2 jest to możliwe (to się wiąże z zagadnieniami, które dokładniej omawiać będziemy podczas rozważania teorii endomorfizmów i wyprowadzania twierdzenia Jordana). Przekonajmy się wyznaczając tę bazę.

Wyznaczymy szukaną bazę α, β przestrzeni W jakby „od tyłu", zapisując ciąg $F = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$ w tej bazie. A zatem mamy równanie

$$F = c_1\alpha + c_2\beta \in K^\infty.$$

W szczególności mamy układ równań

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= F_0 \\ c_1 a + c_2 b &= F_1 \\ c_1 a^2 + c_2 b^2 &= F_2 \\ c_1 a^3 + c_2 b^3 &= F_3 \\ &\vdots, \end{aligned}$$

czyli w rezultacie otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 a + c_2 b &= 1 \\ c_1 a^2 + c_2 b^2 &= 1 \\ c_1 a^3 + c_2 b^3 &= 2 \\ &\vdots, \end{aligned}$$

A zatem $c_1 = -c_2$, czyli $c_1 a - c_1 b = 1, c_1 a^2 - c_1 b^2 = 1$, czyli $c_1(a-b) = c_1(a-b)(a+b) = 1$, czyli $a + b = 1$ itd. Ostatecznie:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A zatem wzór na F_n pochodzi od rozpisania n-tej współrzędnej F jako kombinacji liniowej elementów bazowych α, β, czyli $F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$. Pozostaje oczywiście sprawdzić, że tak uzyskane ciągi spełniają założenia, to znaczy: należą do W i są liniowo niezależne. Pierwsza obserwacja jest jasna, bo:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n},$$

czyli $a^{n+1} = a^n + a^{n-1}$. Podobnie pokazujemy, że $b^{n+1} = b^n + b^{n-1}$. To, że ciągi α, β są liniowo niezależne to łatwe ćwiczenie. A zatem ciągi α, β są rzeczywiście bazą W i zachodzi wzór na ciąg Fibonacciego[2].

Czytelnika nie do końca przekonanego skąd rzeczywiście wzięły się w rozwiązaniu liczby $(1 \pm \sqrt{5})/2$ polecam nieco ogólniejsze spojrzenie. Rozważmy ciąg (x_n) z K^n spełniający warunki

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0.$$

Interesują nas niezerowe ciągi geometryczne określone wzorem $t_n = q^n$ spełniające to równanie. A zatem iloraz $q \neq 0$ tych ciągów spełnia równanie:

$$q^{n+2} + aq^{n+1} + bq^n = 0,$$

czyli

$$q^2 + aq + b = 0.$$

Równanie $x^2 + ax + b = 0$ nazywane jest zwykle **równaniem charakterystycznym** równania rekurencyjnego $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$. W zależności od tego, czy równanie charakterystyczne ma jedno, czy dwa rozwiązania, postać ogólna ciągów spełniających wyjściowe równanie jest inna. Jeśli równanie to ma dwa różne rozwiązania p oraz q, to wyjściową rekurencję spełnia ciąg $x_n = c \cdot p^n + d \cdot q^n$, gdzie współczynniki c, d wyznaczamy z układu równań utworzonego przez wstawienie $n = 0$ i $n = 1$ do rozwiązania ogólnego. Czytelnik domyśla się zapewne, że również liniowa rekurencja rzędu k ma równanie charakterystyczne rzędu k i odpowiednio skomplikowane zbiory rozwiązań. Zainteresowanych tym tematem oraz elementarnymi zastosowaniami ciągów rekurencyjnych zachęcam do lektury tekstu prof. Wojciecha Guzickiego: „Równania rekurencyjne": `https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/materialy/Rekurencja.pdf`.

[2] Wzór ten, zwany też wzorem Bineta, znany był już w XVIII wieku Bernoullemu, Eulerowi czy de Moivre'owi.