Praca domowa z GALu, seria dodatkowa

Można rozwiązać dowolną liczbę zadań i przesłać na mail

`a.mecel@mimuw.edu.pl` nie później niż 15 stycznia.

Zadanie 1. *Niech* $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$. *Dowiedź, że funkcjonały* $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V^*$, *określone wzorami*

$$f_1(A) = a_{11} - a_{12}, \qquad f_2(A) = a_{12} + 2a_{22},$$
$$f_3(A) = a_{12} - a_{21}, \qquad f_4(A) = a_{21} + 3a_{22}$$

dla $A = [a_{ij}] \in V$, *tworzą bazę przestrzeni* V^* *i skonstruuj taką bazę* $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ *przestrzeni* V, *aby* $E_j^* = f_j$ *dla* $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Zadanie 2. *Załóżmy, że* V *jest przestrzenią liniową oraz* $f, g \in V^*$. *Uzasadnij, że gdy* $f(v)g(v) = 0$ *dla dowolnego* $v \in V$, *to* $f = 0$ *lub* $g = 0$. *Czy wynik ten można uogólnić na więcej niż dwa funkcjonały?*

Zadanie 3. *Niech* $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in M_{1\times n}(K)$. *Pokaż, że następujące warunki są równoważne*

- *układ równań* $\begin{cases} Ax = 0 \\ bx \neq 0 \end{cases}$ *ma rozwiązanie* $x \in M_{n\times 1}(K)$,
- *układ postaci* $A^T y = b^T$ *nie ma rozwiązania* $y \in M_{m\times 1}(K)$.

Zadanie 4. *Niech* V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* K *i niech* $f, f_1, \ldots, f_k \in V^*$. *Przypuśćmy, że* $f(x) = 0$, *jeśli tylko zachodzi warunek* $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x)$. *Pokaż, że* $f \in \mathrm{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

Zadanie 5. *Dany jest układ wektorów* $v_1, \ldots, v_n$ *w przestrzeni* V. *Wykaż, że układ ten jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg funkcjonałów* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in V^*$ *takich, że macierz* $[a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} = [f_i(v_j)]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *jest maksymalnego rzędu.*

Zadanie 6. *Niech* $f : M_n(K) \to K$ *będzie funkcjonałem takim, że* $f(A) = 0$, *o ile* $A^2 = 0$. *Pokaż, że* $f(A) = c \cdot tr(A)$, *dla pewnego* $c \in K$ *(uwaga:* $tr(A)$ *jest sumą wyrazów na przekątnej macierzy* A*).*

Zadanie 7. *Niech* U *będzie podprzestrzenią* V. ***Anihilatorem podprzestrzeni*** U *w* V^*, *oznaczanym przez* $Ann(U)$, *nazwiemy zbiór wszystkich funkcjonałów na* V, *które znikają na* U, *czyli:*

$$Ann(U) = \{f \in V^* \mid f(u) = 0, \ \text{dla każdego } u \in U\}.$$

Niech $W \subseteq K^n$ *będzie podprzestrzenią opisaną równaniem* $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

- *Pokaż, że* $Ann(W)$ *składa się z funkcjonałów postaci* $f(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1 + \ldots + x_n)$.
- *Pokaż, że istnieje bijekcja pomiędzy* W^* *oraz podzbiorem* $(K^n)^*$ *złożonym z funkcjonałów* $f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ *na* K^n *spełniających* $c_1 + \ldots + c_n = 0$.

Zadanie 8. *Niech*

$$V = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}.$$

Definiujemy przekształcenie $\Psi : V \to V^*$ *przeprowadzające ciąg* (a_n) *na funkcjonał* $\Psi_{(a_n)}$ *dane wzorem* $\Psi_{(a_n)}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. *Sprawdź, że* Ψ *jest dobrze określone. Czy* Ψ *jest monomorfizmem? Czy* Ψ *jest epimorfizmem? Jeśli nie jest epi to skonstruuj funkcjonał, który nie leży w obrazie.*