Praca domowa z GALu, seria 6

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań
i złożenie ich na Moodle do końca 29 stycznia.

Zadanie 1. *Niech* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *oraz niech* $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem* $T(X) = AX$. *Znajdź wyznacznik macierzy* $\det(M(T)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})$, *gdzie* $\mathcal{A}$ *jest dowolną bazą przestrzeni* $M_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 2. *Załóżmy, że* $n \geqslant 1$ *jest liczbą nieparzystą.*

1. *Dowiedź, że gdy permutacja* $\sigma \in S_n$ *spełnia* $\sigma^2 = \mathrm{id}$, *to* σ *ma* punkt stały.
2. *Pokaż, że gdy dla macierzy* symetrycznej $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z})$ *zachodzi* $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$, *to* $\det A \in \mathbb{Z}$ *jest liczbą parzystą.*

Zadanie 3. *Dany jest układ równań liniowych* U *o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że układ ten ma dla dowolnej liczby pierwszej* p *dokładnie jedno rozwiązanie w ciele* $\mathbb{Z}_p$, *tzn. po zredukowaniu wyrazów macierzy rozszerzonej tego układu modulo* p *dostajemy macierz układu* U_p *o współczynnikach w* $\mathbb{Z}_p$, *który ma dokładnie jedno rozwiązanie. Czy układ* U *posiada rozwiązanie będące ciągiem liczb całkowitych?*

Zadanie 4. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych* $x_1, \ldots, x_n$ *oraz liczb całkowitych dodatnich* $k_1, \ldots, k_n$ *wyznacznik*

$$\begin{vmatrix} x_1^{k_1} & x_2^{k_1} & \dots & x_n^{k_1} \\ x_1^{k_2} & x_2^{k_2} & \dots & x_n^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k_n} & x_2^{k_n} & \dots & x_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

jest podzielny przez $n!$

Zadanie 5. *Rozważmy wielomian* $f(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$. *Rozważmy też wyznacznik:*

$$C(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pokaż, że $C(a_1, \ldots, a_n) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\epsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\epsilon_n)$, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ są pierwiastkami stopnia n z 1.

Podpowiedź. Rozważ:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-2} & \dots & \epsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$