Praca domowa z GALu, seria 6

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań
i złożenie ich na Moodle do końca 22 stycznia.

Zadanie 1. *Oblicz wyznacznik macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ n-1 & n & n+3 & n+4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ n-1 & n-2 & n & n+4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & n & 2n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -n+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. *Oblicz wyznacznik poniższej macierzy $X_a \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, dla każdego $a \in \mathbb{R}$:*

$$X_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ a & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną wyznacz macierze X_a^{-1}, dla wszystkich parametrów a, dla których macierz X_a jest odwracalna.

Zadanie 3. *Niech d_n będzie wyznacznikiem macierzy $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, gdzie $a_{ij} = \cos((n(i-1)+j)$. Na przykład:*

$$d_3 = \begin{vmatrix} \cos(1) & \cos(2) & \cos(3) \\ \cos(4) & \cos(5) & \cos(6) \\ \cos(7) & \cos(8) & \cos(9) \end{vmatrix}.$$

(Argumenty funkcji $\cos(x)$ są podane w radianach, nie w stopniach). Wyznacz $\lim_{n\to\infty} d_n$.

Zadanie 4. *Obliczyć wyznacznik macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, gdzie $a_{ij} = \frac{1}{\min\{i,j\}}$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Zadanie 5. *Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz dwie odwracalne macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ spełniające równość*

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}.$$

Udowodnij, że $\det(A) = \det(B)$. Czy ta sama konkluzja ma miejsce dla macierzy odwracalnych o współczynnikach zespolonych?