# Praca domowa z GALu, seria 5

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań

i złożenie ich na Moodle do końca 22 grudnia.

**Zadanie 1.** *Wyznacz wzór na symetrię* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *względem podprzestrzeni* $V$ *wzdłuż* $W$*, gdzie*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \mathrm{lin}((2, 1, -2)).$$

*Czy symetria ta może mieć w pewnych bazach* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *macierz postaci:*

$$\mathrm{M}(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

**Zadanie 2.** *Niech* $V = \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ *oraz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}), \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q}).$$

*Czy odwzorowanie* $f \colon V \to V$*, dane wzorem* $f(X) = AX + XB$*, jest liniowe? Jeśli tak, to wyznacz macierz* $M_E^E(f)$ *w bazie* $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$*, gdzie* $E_{ij} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ *jest macierzą, której* $(i,j)$*-ty wyraz równy jest* 1*, zaś pozostałe wyrazy równe są* 0*.*

**Zadanie 3.** *Niech* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *będzie macierzą taką, że każdy jej wiersz i każda jej kolumna zawiera dokładnie jeden niezerowy wyraz równy* 1 *lub* $-1$*, a pozostałe wyrazy są zerami. Pokaż, że* $A^k = I_n$*, dla pewnego* $k > 0$*.*

**Zadanie 4.** *Niech* $f, g \in L(V, W)$ *mają tę własność, że dla każdego* $v \in V$ *wektor* $f(v)$ *jest proporcjonalny do* $g(v)$*. Dowiedź, że* $f = cg$*, dla pewnego skalara* $c$*.*

**Zadanie 5.** *Niech* $U, V, W$ *będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem* $K$*. Załóżmy, że* $f \in L(U, V)$ *oraz* $g \in L(V, W)$*. Wykaż, że:*

1. $\dim \ker(g \circ f) = \dim \ker f + \dim(\operatorname{im} f \cap \ker g)$.
2. $\dim \operatorname{im}(g \circ f) = \dim \operatorname{im} f - \dim(\operatorname{im} f \cap \ker g)$.

*Wywnioskuj z punktów (1) oraz (2), że gdy* $h \in L(V, V)$*, to:*

3. $\dim \ker h^{n+1} = \dim \ker h + \sum_{i=1}^{n} \dim(\operatorname{im} h^i \cap \ker h)$ *dla dowolnego* $n \geqslant 1$*.*
4. $\dim \operatorname{im} h^{n+1} = \dim \operatorname{im} h - \sum_{i=1}^{n} \dim(\operatorname{im} h^i \cap \ker h)$ *dla dowolnego* $n \geqslant 1$*.*