Praca domowa z GALu, seria 4

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań
i złożenie ich na Moodle do końca 30 listopada.

Zadanie 1. *Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego określ liczbę rozwiązań układu równań liniowych zadanego macierzą*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & t \end{array}\right]$$

w zależności od parametrów $s, t \in \mathbb{Z}_7$.

Zadanie 2. *Niech*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}.$$

Opisz $U \cap V$ *oraz* $U + V$ *jako przestrzenie rozwiązań układów równań liniowych.*

Zadanie 3. *Niech* $U = \mathrm{Lin}((1,3,2,5),(3,5,1,7),(1,3,s,8)) \subseteq \mathbb{R}^4$, *zaś* $V \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + tx_4 = 0. \end{cases}$$

Wyznacz wymiary przestrzeni U *oraz* V *w zależności od parametrów* $s, t \in \mathbb{R}$. *Dla jakich par* $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *zachodzi* $U \oplus V = \mathbb{R}^4$*?*

Zadanie 4. *Niech* $n \geqslant 1$. *Załóżmy, że* U, V, W *są* n*-wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej* X. *Pokaż, że gdy* $\dim(U \cap V) = \dim(V \cap W) = \dim(W \cap U) = n - 1$, *to* $\dim(U + V + W) = n + 1$ *lub* $U \cap V = V \cap W = W \cap U$.

Zadanie 5. *Niech* K *będzie ciałem oraz* $n \geqslant 1$. *Wprowadźmy* komutator *macierzy* $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ *formułą*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Zdefiniujmy $S = \{[A, B] : A, B \in \mathrm{M}_n(K)\}$. *Wyznacz bazę oraz wymiar podprzestrzeni* $V = \mathrm{Lin}(S) \subseteq \mathrm{M}_n(K)$.