Praca domowa z GALu, seria 3

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań
i złożenie ich na Moodle do końca 15 listopada.

Zadanie 1. *Dla liczby rzeczywistej u niech $W_u = \mathrm{lin}((7,9,6,8),(11,u,12,u+1),(2,1,3,2),(3,-4,9,2))$ będzie podprzestrzenią w $\mathbb{R}^4$. Dla jakich $u \in \mathbb{R}$ podprzestrzeń W_u jest rozwiązaniem układu równań liniowych złożonego z jednego niezerowego (tzn. $0 = 0$) równania?*

Zadanie 2. *Niech $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni W. Zbadaj czy istnieje baza przestrzeni W zawierająca wektor $(1,1,-1,2)$? Jeśli tak, to podaj (z uzasadnieniem) przykład takiej bazy.*

Zadanie 3. *Rozważmy podprzestrzeń $F \subset K^\infty$ złożoną z ciągów (a_n), których wyrazy spełniają równość $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Wyznacz wymiar F w zależności od ciała K. Załóżmy, że (a_n) jest postaci λ^n, dla ustalonego $\lambda \in K$. Nazwijmy ten element „ciągiem potęgowym”. Pokaż, że dla $K = \mathbb{R}$ istnieje baza F złożona z ciągów potęgowych, zaś dla $K = \mathbb{Z}_5$ taka baza nie istnieje. Wskaż (za pomocą jawnych formuł) dowolną bazę przestrzeni F dla $K = \mathbb{Z}_5$.*

Zadanie 4. *Załóżmy, że $1 \leqslant n \leqslant m$ oraz $v_j = (a_{j1},\ldots,a_{jm}) \in \mathbb{C}^m$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$. Pokaż, że gdy dla każdego $1 \leqslant p \leqslant n$ istnieje takie $1 \leqslant q \leqslant m$, że*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{jq}| < 2|a_{pq}|,$$

to wektory $v_1,\ldots,v_n$ są liniowo niezależne.

Zadanie 5. *Niech $n \geqslant 1$. Udowodnij, że funkcje $f_1,\ldots,f_n \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, że wektory*

$$v_i = (f_1(x_i),\ldots,f_n(x_i)) \in \mathbb{R}^n \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

są liniowo niezależne.