Praca domowa z GALu, grupa 1

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań
i złożenie ich na Moodle do końca 29 października.

Zadanie 1. *Niech* $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) < 0, Im(z) \leqslant 0, |z| < 8\}$ *i niech funkcja* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *będzie zadana wzorem* $f(z) = z^3$. *Naszkicuj zbiory* D *oraz* $f^{-1}(D)$. *Znajdź wszystkie pierwiastki równania* $z^3 = |z|$, *które należą do* D.

Zadanie 2. *Pokaż, że jeśli* $z = \cos\theta + i\sin\theta$, *to* $|1 - z| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. *Następnie wykaż, że:*

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Zadanie 3. *Dookoła okrągłego stołu siedzi w pewnej ustalonej kolejności* n *osób, z których każda odczuwa dokładnie jeden z dwóch stanów: zadowolenie lub smutek. Na początku tylko jedna osoba jest zadowolona. Stan dowolnej osoby* X *siedzącej przy stole może się zmienić pod warunkiem, że zmieni się jednocześnie stan każdej* kd*-tej osoby za nią, gdzie* d *jest dzielnikiem* n, $d < n$, $k \in \{1, \ldots, \frac{n}{d} - 1\}$ *oraz, o ile przed tą zmianą wszystkie te* n/d *osób (łącznie z* X*) było w tym samym stanie. Dla jakich wartości* n *możliwe jest, przy opisanych wyżej zmianach nastrojów, uzyskanie sytuacji, w której wszystkie osoby siedzące przy stole będą jednocześnie zadowolone?*

Zadanie 4. *Dla liczby* $\lambda \in \mathbb{C}$ *takiej, że* $|\lambda| \leqslant 1$ *rozważamy zbiór* P_λ *złożony ze wszystkich punktów postaci:*

$$a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \ldots + a_k\lambda^{n_k},$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+, a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *zaś* $n_1, \ldots, n_k$ *przebiegają wszystkie liczby całkowite nieujemne (tzn. bierzemy najmniejszy wypukły podzbiór* $\mathbb{C}$ *zawierający wszystkie liczby* $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots$*).*

- *Załóżmy, że* P_λ *jest* n*-kątem. Wykaż, że jego wierzchołkami są* $1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}$.
- *Niech* $\Lambda_n \subseteq \mathbb{C}^n$ *będzie podzbiorem złożonym ze wszystkich* λ *takich, że* P_λ *jest* n*-kątem (dwukątem jest dla nas odcinek). Określamy też* $\Lambda_1 = \{0\}$. *Pokaż, że liczba* $z \in \mathbb{C}$ *spełnia równanie*

  $$z^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1} = 0,$$

  dla pewnych $1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

  $$z \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots\ldots \cup \Lambda_n.$$

Zadanie 5. *Niech* $f(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$ *będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokaż, że jeśli wszystkie pierwiastki* f *leżą w lewej półpłaszczyźnie*

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, Re(z) < 0\},$$

to dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n-3$ *zachodzi nierówność:* $a_ka_{k+3} < a_{k+1}a_{k+2}$.