Praca domowa z GALu, grupa 1

Proszę o rozwiązania czterech z pięciu poniższych zadań

i złożenie ich na Moodle do końca 22 października.

Zadanie 1. *Dla jakich liczb rzeczywistych a poniższy układ ma rozwiązanie? Dla każdego takiego a wyznaczyć zbiór rozwiązań.*

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2ax_3 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 2. *Trzy różne liczby zespolone z_1, z_2, z_3 leżą na okręgu o środku w punkcie 0. Wiadomo, że liczby $z_1 + z_2z_3, z_2 + z_3z_1$ oraz $z_3 + z_1z_2$ są rzeczywiste. Pokazać, że $z_1z_2z_3 = 1$.*

Zadanie 3. *Niech $P(z) = z^2 + az + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$. Załóżmy, że jeśli $|z| = 1$ to $|p(z)| = 1$. Pokazać, że $a = b = 0$.*

Zadanie 4. *Założmy, że $\cos(\alpha) = \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $q^n \cos(n\alpha)$ jest całkowita.*

Zadanie 5. *Pokazać, że każdy element ciała skończonego F może być zapisany w postaci $x^2 + y^2$, gdzie $x, y \in F$.*