Wyznacznik – wzór permutacyjny oraz jego zastosowania

Ostatnia aktualizacja: 24.01.2022 r.

Ostatni wykład pierwszego semestru poświęcimy alternatywnemu spojrzeniu na wyznacznik, opartemu na pojęciu permutacji. Jest ono rzeczywiście alternatywne, bowiem w wielu źródłach wyznacznik definiowany jest właśnie za pomocą formuły, którą za chwile wprowadzimy – tzw. wzoru Leibniza, inaczej nazywanego wzorem permutacyjnym. Idea jest prosta – zamiast skomplikowanej rekurencyjnej definicji dostajemy otwarty wzór, pozwalający zresztą wykazać łatwo wiele podstawowych, znanych nam już własności wyznacznika. Kłopot stanowi dość skomplikowana postać wzoru, wymagająca wstępnych wyjaśnień i stosunkowo złożonej notacji. Zapewne nie będą Państwo często liczyć wyznacznika właśnie za pomocą tej formuły. Wielokrotnie jednak definiować będziemy w drugim semestrze funkcje, właśnie w oparciu o wyznaczniki. Będą to najpierw pewne niezmienniki przekształceń liniowych, a później też niezmienniki przestrzeni liniowych wyposażonych w dodatkową strukturę (i przekształceń liniowych zachowujących te dodatkowe struktury). Rozumienie własności tych funkcji ma fundamentalne znaczenie w algebrze liniowej. Nie odejdziemy więc zupełnie od kontekstu geometrycznego. Nieśmiałe aluzje do pojęcia „objętości ze znakiem" nabiorą już dziś nowego sensu. Z jednej strony domykamy więc teorię kluczowego dla nas pojęcia – z drugiej zaś przygotowujemy grunt do niezwykle intensywnej pracy, która dopiero przez nami.

Przypomnijmy najpierw notację kolumnową, którą będziemy dziś stosować. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą kolumnami macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Wówczas pisać będziemy

$$A = [A_1, \ldots, A_n].$$

Kolumny macierzy identycznościowej oznaczamy (kolejno) przez $E_1, \ldots, E_n$.

Definicja 1. ***Permutacją*** *zbioru n-elementowego nazwiemy dowolną bijekcję* $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. *Zbiór takich bijekcji oznaczamy przez* S_n. *Każdej permutacji* $\sigma \in S_n$ *odpowiada* ***macierz permutacji:***

$$E_\sigma = [E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \ldots, E_{\sigma(n)}].$$

Liczbę $\det E_\sigma \in \{1, -1\}$ *nazywamy* ***znakiem permutacji*** σ, *ozn.* $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Przykład. Rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Notacja *tabelkowa*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz tej permutacji ma postać:

$$E_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

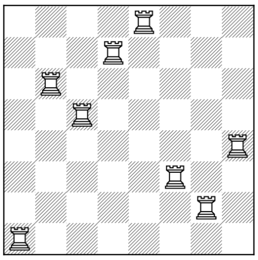
Znak tej permutacji liczymy sprawdzając liczbę zamian kolumn potrzebną do uzyskania macierzy identycznościowej – parzysta liczba zamian oznacza wyznacznik równy 1, zaś nieparzysta liczba zamian – wyznacznik równy -1 (łatwo pokazać, że możliwości te wykluczają się dla $1 + 1 \neq 0$). Zatem $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

Czytelnik może znać nieco inne definicje znaku permutacji, oparte o pojęcia nieporządków, rozkłady na cykle itd. Ten czysto kombinatoryczny aspekt można w naszych rozważaniach pominąć dysponując bogatą maszynerią dotyczącą wyznacznika. Odnotujmy jednak choćby jedną zasadniczą kwestię.

Elementy zbioru S_n można składać (tak, jak składa się funkcje). tzn. jeśli $\sigma, \rho \in S_n$ to $\rho \circ \sigma \in S_n$. Można sprawdzić, że wraz z permutacją identycznościową $\mathrm{id} \in S_n$ zbiór S_n tworzy **grupę**, tzn. $(S_n, \circ, \mathrm{id})$ jest zbiorem z działaniem dwuargumentowym $\circ$ spełniającym (w sposób oczywisty) następujące warunki:

- działanie $\circ$ jest łączne,
- dla każdego $\sigma \in S_n$ mamy $\sigma \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma$,
- dla każdego $\sigma \in S_n$ istnieje $\rho \in S_n$ takie, że $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Z punktu widzenia teorii wyznaczników przydatna będzie dla Państwa następująca obrazowa intuicja. Rozważmy takie rozstawienie wież na szachownicy (a_{ij}) rozmiaru $n \times n$, by w każdym wierszu i kolumnie znajdowała się dokładnie jedna wieża. Permutacji $\sigma \in S_n$ odpowiada jedno z $n!$ różnych rozstawień.



W powyższym przykładzie dla $n = 8$ wieże rozstawione są na miejscach:

$$a_{\sigma(1)1}, a_{\sigma(2)2}, a_{\sigma(3)4}, a_{\sigma(4)4}, a_{\sigma(5)5}, a_{\sigma(6)6}, a_{\sigma(7)7}, a_{\sigma(8)8},$$

czyli:

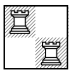
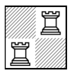
$$a_{81}, a_{32}, a_{43}, a_{24}, a_{15}, a_{66}, a_{77}, a_{58}.$$

Jesteśmy gotowi do wprowadzenia tytułowego wzoru.

Twierdzenie 1. *Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

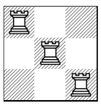
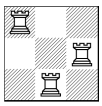
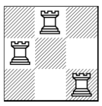
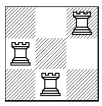
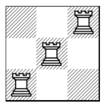
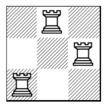
Przykład 1. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ rozmiaru 2×2 mamy dwie możliwe permutacje kolumn reprezentowane przez następujące rozstawienia wież:

Dokładniej, $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, gdzie $\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2$ oraz $\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1$. Oczywiście widzimy, że $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$, skąd $\det A = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) a_{21} a_{12}$.

Przykład 2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

Ważne: jeśli dla $\sigma \in S_n$ *jakaś wieża stoi na zerze*, tzn. $a_{\sigma(i)i} = 0$, dla pewnego i, to odpowiedniego składnika $(= 0)$ nie wliczamy do obliczania wyznacznika. Popatrzmy na dwa kolejne przykłady.

Przykład 3. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} a_{\sigma(5)5} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1.$$

Przykład 4. Dla macierzy górnotrójkątnej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n. \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

* * *

Dowodzimy formułę permutacyjną. Będziemy korzystać z tego, że wyznacznik jest jedyną funkcją $M_n(K) \to K$ spełniającą warunki:

(1) jednorodność ze względu na k-tą kolumnę,

(2) addytywność względem k-tej kolumny,

(3) funkcja zeruje się, jeśli macierz ma identyczne dwie (sąsiednie) kolumny,

(4) przyjmuje wartość 1 na macierzy I,

Innymi słowy:

$$\det[A_1, \dots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \dots, A_n] = \det[A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \dots, A_n],$$
$$\det[A_1, \dots, A_{k-1}, aC, A_{k+1}, \dots, A_n] = a \cdot \det[A_1, \dots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \dots, A_n].$$

Fakty te wynikają natychmiast z tego, że $\det X = \det X^T$.

Mamy też, dla i-tej kolumny macierzy A:

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = a_{1i} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + a_{ni} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = a_{1i}E_1 + \dots + a_{ni}E_n.$$

Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\det[A_1, \dots, A_n] = \det[a_{11}E_1 + \dots + a_{n1}E_n, \dots, a_{n1}E_1 + \dots + a_{nn}E_n].$$

Korzystamy teraz z addytywności i jednorodności względem pierwszej kolumny dostając:

$$\begin{aligned} \det[A_1, \dots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \dots + a_{n1}E_n, \dots, a_{n1}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] = \\ &= a_{11} \det[E_1, a_{12}E_1 + \dots + a_{n2}E_n, \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ a_{21} \det[E_2, a_{12}E_1 + \dots + a_{n2}E_n, \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ \dots + \\ &+ a_{n1} \det[E_n, a_{12}E_1 + \dots + a_{n2}E_n, \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n]. \end{aligned}$$

Teraz dla dwóch z otrzymanych n składników korzystamy z liniowości względem drugiej kolumny:

$$\begin{aligned} \det[A_1, \dots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \dots + a_{n1}E_n, \dots, a_{n1}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] = \\ &+ a_{11}a_{12} \det[E_1, E_1, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ a_{11}a_{22} \det[E_1, E_2, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ \dots + \\ &+ a_{11}a_{n2} \det[E_1, E_n, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ a_{21}a_{12} \det[E_1, E_1, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ a_{21}a_{22} \det[E_1, E_2, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ \dots + \\ &+ a_{21}a_{n2} \det[E_1, E_n, , \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n] + \\ &+ \dots + \\ &+ a_{n1} \det[E_n, a_{12}E_1 + \dots + a_{n2}E_n, \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n]. \end{aligned}$$

Tą samą procedurę wykonujemy dla pozostałych $n-2$ składników, dostając n^2 składników postaci:

$$\det[A_1, \dots, A_n] = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i2}, \dots, a_{1n}E_1 + \dots + a_{nn}E_n].$$

Teraz dla każdego z n^2 składników korzystamy z liniowości względem trzeciej kolumny, co da nam n^3 składników – i tak dalej aż otrzymamy przedstawienie w postaci n^n składników:

$$\det[A_1, \dots, A_n] = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}].$$

Zauważmy, że z tych n^n składników tylko $n!$ może być niezerowych – te, dla których $\det[E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}] \neq 0$. Tymczasem z własności (3) dostajemy:

$$\det[E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}] = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i_k \text{ nie są parami różne,} \\ \operatorname{sgn}(\sigma) & \text{dla } \sigma \in S_n : \sigma(k) = i_k. \end{cases}.$$

Dowód jest zakończony.

Wzór permutacyjny pozwala, jak widzieliśmy wyżej, na wykazanie wielu własności wyznacznika. Można też, w oparciu o abstrakcyjną definicję znaku permutacji, uznać wzór permutacyjny za definicję wyznacznika. Takie podejście przyjmowane jest zwłaszcza w starszych podręcznikach. Aby zademonstrować istotne znaczenie tego wzoru ograniczymy się do niezwykle istotnego faktu – będzie to podstawa naszych rozważań w kolejnym semestrze.

Wniosek 1. *Dla dowolnej macierzy $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ funkcja $K \ni x \mapsto \det(A + xI)$ jest wielomianem stopnia n.*

Nie sposób teraz wyjaśnić dokładnie doniosłości tego faktu. Ograniczmy się do uzasadnienia i pokazania prostego zastosowania.

Dowód. Mamy:

$$A + xI = \begin{bmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + x \end{bmatrix}$$

Liczymy $\det(A + xI) = (x_{ij})$ ze wzoru permutacyjnego. Dla każdego $\sigma \in S_n$ mamy[1]:

$$\deg \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n} \leqslant |\{i : \sigma(i) = i\}|.$$

Stąd tylko iloczyn elementów z przekątnej ($\sigma = \mathrm{id}$) może mieć stopień n i ma, bo:

$$x_1 \dots x_n = (a_{11} + x) \dots (a_{nn} + x) = x^n + \dots .$$

□

Wniosek 2. *Gdy $K = \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), to jeśli $\det A = 0$, to dla wszystkich $\epsilon \neq 0$ o *dostatecznie małym module* macierz $A + \epsilon I$ jest odwracalna.*

Dowód. Jest skończenie wiele pierwiastków $\det(A + xI)$ o niezerowym module. □

Wniosek 3. *Jeśli $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, to wyznacznik macierzy blokowej rozmiaru $2n \times 2n$ o takich blokach ma postać:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

o ile $AC = CA$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że dodatkowe założenie jest konieczne, z uwagi na macierz o blokach:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1] Zbiór po prawej to zbiór punktów stałych permutacji.

Dowód. Rozważamy osobno przypadki, gdy $\det A \neq 0$ oraz, gdy $\det A = 0$.

- Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\underbrace{\begin{vmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix}}_{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}}_{?} = \underbrace{\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}}_{|A||D-CA^{-1}B|}.$$

Korzystając z przemienności A oraz C mamy

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

- Niech $\det A = 0$. Weźmy d takie, że $|A + \epsilon I| \neq 0$, dla $0 < \epsilon < d$. Wtedy

$$(A + \epsilon I)C = C(A + \epsilon I),$$

czyli z przypadku wyżej:

$$\begin{vmatrix} A + \epsilon I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + \epsilon I)D - CB|.$$

Funkcja $\det(A + xI)$ jest ciągła (jesteśmy nad $\mathbb{R}$), wiec biorąc $\epsilon \to 0$ dostajemy tezę

□

Czy wniosek sformułowany wyżej rzeczywiście wymaga $K = \mathbb{R}$? Warto pomyśleć.

Na koniec wrócimy na chwilę do rozważań geometrycznych. Temat ten podejmiemy ponownie w kolejnym semestrze.

Definicja 2. *Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:*

- ***zgodnie zorientowane**, jeśli* $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- ***przeciwnie zorientowane**, jeśli* $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Przykład. Bazy

$$\mathcal{A} = \{(3, 2), (7, 4)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 0)\}$$

są zgodnie zorientowane, bo:

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Uwaga 1. *Zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Należy sprawdzić, że zgodne zorientowanie jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

- **Zwrotność**. Jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathbb{R}^n$ to

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I \Rightarrow \det I = 1,$$

czyli bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}$ są zgodnie zorientowane.

- **Symetryczność**. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1},$$

czyli

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} > 0.$$

- **Przechodniość**. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
czyli
$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0, \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} > 0.$$

$\square$

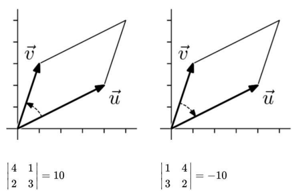
Uwaga: dla każdej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz bazy $\mathcal{A}' = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ powstałej przez zamianę kolejności wektorów na pierwszych dwóch współrzędnych mamy:

- bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}'$ są przeciwnie zorientowane,
- każda baza $\mathbb{R}^n$ jest zgodnie zorientowana z $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{A}'$.

Definicja 3. *Rodzinę wszystkich baz zgodnie zorientowanych z pewną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy **orientacją** przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest **zorientowana**, jeśli wybrana jest jedna z jej (dwóch) orientacji. W przestrzeni zorientowanej mówimy, że jej baza $\mathcal{A}$ jest **dodatnio (ujemnie) zorientowana**, jeśli zorientowana zgodnie (przeciwnie) z wybraną orientacją przestrzeni V.*

Czytelnik może zastanawiać się co ten powrót do geometrii ma wspólnego z permutacjami? Tu warto spojrzeć na równoległościany i naszą, intuicyjną na razie, „objętość". Co się stanie, jeśli w $\mathbb{R}^n$ weźmiemy prostopadłościan $R(v_1, \ldots, v_n)$ i dla $\sigma \in S_n$ rozważymy równoległościan
$$R(v_{\sigma(1)} \ldots, v_{\sigma(n)})?$$
Okazuje się, że prostopadłościany te będą miały, z dokładnością do znaku, tą samą n-wymiarową objętość. Co więcej, jeśli zechcemy rozważać „objętość ze znakiem", czyli np. „skierowane pole" to tak wprowadzone obiekty dla wyżej wymienionych równoległościanów różnić się będą jedynie znakiem permutacji σ. Oto sugestywny, znany nam już przykład.

Przykład. Bazy
$$\mathcal{A} = \{(4,2),(1,3)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,3),(4,2)\}$$
są przeciwnie zorientowane, bo:
$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0.$$



Jeszcze raz przypominamy ten rysunek. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

W tym momencie wypada zakończyć. Czytelnika zainteresowanego głębszymi zastosowaniami permutacjami w teorii wyznaczników mogę skierować na przykład do sformułowania słynnego twierdzenia Cauchy'ego-Bineta[2], będącego uogólnieniem formuły Cauchy'ego, przy czym interesuje nas policzenie wyznacznika iloczynu AB, gdzie AB jest macierzą kwadratową, podczas gdy A, B nie są kwadratowe!

Zakończyliśmy nasze rozważania i pierwszy semestr algebry liniowej. Zebraliśmy narzędzia potrzebne do badania następującego problemu: jak bardzo „zmieniają" się podprzestrzenie gdy działamy na całą przestrzeń przekształceniem liniowym? Innymi słowy: czy są takie podprzestrzenie, z których to przekształcenie nas nie wyprowadza (na przykład dla obrotu w $\mathbb{R}^2$ takich nietrywialnych podprzestrzeni nie ma), czy są takie, do których ograniczenie zamienia przekształcenie w homotetię? Czy zawsze da się rozbić przestrzeń na sumę prostą podprzestrzeni takich, że na każdej przekształcenie zachowuje się jak homotetia? I dlaczego kogoś to by miało interesować? A to dopiero początek. Poznawszy teorię endomorfizmów zajmiemy się geometrią – najpierw poznamy podstawy geometrii afinicznej, a później zajmiemy się kluczowym pojęciem algebry liniowej, mającym niewyobrażalne wprost znaczenie – ortogonalnością. Konieczne będzie swobodne korzystanie ze wszystkich poznanych dotąd metod.

[2] Patrz `https://mimuw.edu.pl/~amecel/2021l/gal21/galII+21wc.html`, wykład szósty, str. 29-24. Zadania dotyczące tego twierdzenia: `https://www.mimuw.edu.pl/~amecel/2017z/galj/[01.19]gal.pdf`.