Wyznacznik i rozwiązywanie układów równań. Wzory Cramera

Ostatnia aktualizacja: 17.01.2022 r.

Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy pojęcie wyznacznika oraz przedstawiliśmy podstawowe metody jego wyznaczania. Pokazaliśmy też, na razie na bardzo intuicyjnym poziomie, związek wyznacznika z pewnymi koncepcjami natury geometrycznej. Dziś opowiemy o podstawowym zastosowaniu wyznacznika – historycznie rzecz biorąc – źródłowym dla jego powstania, a więc o rozwiązywaniu układów równań.

Rozważamy układ U złożony n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (\diamondsuit).$$

Wiemy już, że możemy ten układ zapisać w postaci iloczynu macierzy współczynników oraz wektora o współrzędnych złożonych ze zmiennych tak, by wynikiem była macierz o jednej kolumnie z wyrazami b_i:

$$A \cdot X = B \qquad (\dagger),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Równanie typu ($\dagger$) jest przykładem **równania macierzowego**. Rozmaite problemy algebraiczne można formułować w języku tych równań, a ich rozwiązywanie bywa trudne z uwagi na nieprzemienność mnożenia macierzy oraz to, że nie są one zawsze odwracalne (mogą one dotyczyć też macierzy prostokątnych). Rozpocznijmy od fundamentalnej uwagi, wynikającej z szeregu uzyskanych już przez nas wyników.

Uwaga 1. *Następujące warunki są równoważne:*

- *układ* ($\diamondsuit$) *ma dokładnie jedno rozwiązanie,*
- $\det A \neq 0$,
- *macierz A jest odwracalna.*

Gdy zachodzi dowolny z powyższych warunków, to $X = A^{-1}B$.

Powyższa uwaga pozwala sformułować **metodę macierzową rozwiązywania układów równań**, których macierz współczynników ma niezerowy wyznacznik.

Zobaczmy przykład. Rozważmy układ równań o współczynnikach w $\mathbb{R}$ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ \quad 2x_2 + 5x_3 & = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = 27 \end{cases}.$$

Równanie macierzowe równoważne powyższemu układowi ma postać:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczamy teraz macierz odwrotną do macierzy A współczynników. Możemy to zrobić korzystając z algorytmu przedstawionego na poprzednich wykładach, to znaczy: za pomocą elementarnych operacji na wierszach sprowadzić macierz $[A \,|\, I]$ do macierzy $[I \,|\, A^{-1}]$, uzyskując:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

W rezultacie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Znamy metodę wyznaczania macierzy odwrotnej przy pomocy operacji elementarnych na wierszach. Pokażemy teraz metodę opartą o wyznacznik i tzw. macierz dołączoną.

Definicja 1. *Załóżmy, że $A \in M_n(K)$.* ***Macierzą stowarzyszoną*** *z A definiujemy następująco:*

$$\mathrm{adj}(A) = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})]^T = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & \dots & (-1)^{1+n}|A_{1n}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & \dots & (-1)^{2+n}|A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \dots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix}^T = [(-1)^{j+1}\det(A_{ji})]$$

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zauważmy też, że w powyższym przypadku:

$$\mathrm{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 1. *Zachodzi równość* $\mathrm{adj}\, A \cdot A = \det(A) \cdot I_n$. *W szczególności, jeśli A jest macierzą odwracalną, to*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}(A).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Mnożymy $\mathrm{adj}(A)$ przez A, czyli

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wymnóżmy i-ty wiersz $\mathrm{adj}(A)$ oraz j-tą kolumnę w A. Mamy:

$$(-1)^{i+1}\det A_{1i} \cdot a_{1j} + (-1)^{i+2}\det A_{2i} \cdot a_{2j} + \ldots + (-1)^{n+i}\det A_{ni} \cdot a_{nj}, \qquad (\dagger)$$

To wyrażenie wygląda prawie jak wzór na wyznacznik w rozwinięciu Laplace'a względem i-tej kolumny macierzy A z tym, że zamiast wyrazów z i-tej kolumny macierzy A w poszczególnych składnikach pojawiają się wyrazy z j-tej kolumny. Możemy jednak powiedzieć, że ($\dagger$) to wyznacznik macierzy D_{ij} powstaje z A przez zastąpienie j-tej kolumny kolumną i-tą (wystarczy policzyć wyznacznik D_{ij} rozwijając względem i-tej kolumny. Zauważmy jednak, że jeśli $i \neq j$, to D_{ij} ma dwie identyczne kolumny. czyli:

$$\det D_{ij} = \begin{cases} \det A, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}.$$

W rezultacie:

$$\mathrm{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix},$$

co kończy dowód. □

Jesteśmy również gotowi do sformułowania wzorów pozwalających na uzyskanie rozwiązania równania ($\diamondsuit$) w przypadku, gdy jest ono jedyne.

Twierdzenie 2 (Wzory Cramera)**.** *Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$ (patrz ($\diamondsuit$)). Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i mamy*

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Zobaczmy, dla przykładu, układ równań nad $\mathbb{Q}$ postaci $\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}$.
Jeśli A jest macierzą współczynników tego układu to to zgodnie z definicją G_i oraz wzorami Cramera:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad |G_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad |G_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{|G_1|}{|A|} = 1, \quad y = \frac{|G_2|}{|A|} = 1.$$

Dowód. Jak wiemy z metody macierzowej, aby rozwiązać równanie $AX = B$ powstałe z równania ($\diamondsuit$) należy wykonać następujące mnożenie:

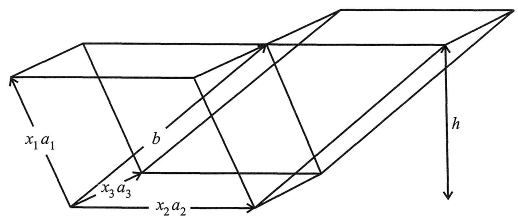
$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ale A^{-1} ma wyrazy c_{ij} postaci: $(-1)^{j+i}\frac{\det A_{ji}}{\det A}$, czyli jeśli G_i to macierz powstała z A przez zamianę i-tej kolumny na B, to argumentując podobnie jak w poprzednim dowodzie widzimy, że iloczyn i-tego wiersza macierzy A^{-1} przez kolumnę B równy jest

$$\det G_i = (-1)^{1+i} b_1 \det A_{1i} + \ldots + (-1)^{n+i} b_n \det A_{ni}, \qquad \text{czyli} \qquad x_i = \frac{\det G_1}{\det A}.$$

$\square$

Wzory Cramera wyglądają dość abstrakcyjnie i nie są zbyt przydatne z punktu widzenia rachunków na komputerze, ale są podstawą kilku interesujących rezultatów. O jednym z nich wspomnimy za chwilę. Zobaczmy najpierw ciekawą interpretację geometryczną wzorów Cramera w przestrzeni trójwymiarowej. Niech $A \in M_3(\mathbb{R})$ będzie macierzą odwracalną o kolumnach a_1, a_2, a_3 i rozważmy wektor $b \in \operatorname{lin}(a_1, a_2, a_3)$ tak, że układ $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Innymi słowy, istnieją jednoznacznie wyznaczone $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$. Przyjmijmy, dla uproszczenia, że $\det A > 0$, $x_1, x_2, x_3 > 0$ i rozważmy równoległościany $R = R(x_1a_1, x_2a_2, x_3a_3)$ oraz $R_1 = R(b, x_2a_2, x_3a_3)$:



Rysunek 1. Źródło: A Geometric Interpretation of Cramer's Rule, Gregory Conner and Michael Lundquist

Równoległościan $R(x_2a_2, x_3a_3)$ traktować możemy jako wspólną podstawę obydwu tych równoległościanów. Mają one również wspólną wysokość opuszczoną na tę podstawę. W tym momencie nie mamy narzędzi by to ściśle uzasadnić, ale geometrycznie sprawa jest oczywista: ściany w R, R_1 równoległe do wspólnej podstawy leżą w równoległej do niej płaszczyźnie rozpiętej przez wektory a_2, a_3 i przesuniętej względem podstawy o wektor x_1a_1 (to „przesunięcie" sprawia, że jest to płaszczyzna afiniczna, o czym będziemy się uczyć w przyszłym semestrze). Stąd, na mocy naszej (intuicyjnej na razie) interpretacji wyznacznika jako objętości (z dokładnością do wartości bezwzględnej, ale korzystamy z $x_1, x_2, x_3 > 0$):

$$\det[x_1a_1 \;\; x_2a_2 \;\; x_3a_3] = \det[b \;\; x_2a_2 \;\; x_3a_3].$$

Stąd korzystając z własności wyznacznika mamy $x_1x_2x_3 \det[a_1 \;\; a_2 \;\; a_3] = x_2x_3 \det[b \;\; a_2 \;\; a_3]$. A zatem:

$$x_1 = \frac{\det[b \;\; a_2 \;\; a_3]}{\det[a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]}.$$

Przyjrzyjmy się następującemu zagadnieniu, interesującemu również z punktu widzenia algebry.

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega ba znalezieniu dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wielomianu $P_n \in \mathbb{R}[x]$ stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n+1$ z góry zadanych parami różnych punktach $x_0, \ldots, x_n$ są takie same, jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Zamiast $\mathbb{R}$ można rozważać dowolne ciało charakterystyki 0. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma dokładnie jedno rozwiązanie. Mianowicie konstruując funkcje pomocnicze:*

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}. \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$

określamy rozwiązanie zadania interpolacyjnego wzorem:

$$P_n(x) = f(x_0)p_0(x) + f(x_1)p_1(x) + \ldots + f(x_n)p_n(x) = \sum_{i=0} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}. \qquad (\heartsuit)$$

Przykład: biorąc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 3, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 1,$$

mamy:

$$p_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}, \quad p_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)}$$
$$p_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}, \quad p_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}$$

Dowód. Nietrudno widzieć, że $p_i(x)$ to wielomiany stopnia n takie, że[1]:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Stąd $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n przyjmującym w punktach x_i wartości $f(x_i)$, czyli jest rozwiązaniem problemu interpolacyjnego. Z drugiej strony z twierdzenia Bezout wiadomo, że wielomian taki jest jednoznaczny. Istotnie, gdyby jakiś wielomian P'_n stopnia nie większego od n również spełniał zadanie interpolacyjne, wówczas $P_n(x) - P'_n(x)$ jest wielomianem stopnia n o $n+1$ pierwiastkach $x_0, \ldots, x_n$, co implikuje, że $P_n(x) = P'_n(x)$. □

Powyższe twierdzenie zawiera pewien zaskakujący element: definicję wielomianów p_i. Dlaczego mają one taką właśnie postać? Podpowiedzi dostarczają nam wzory Cramera zastosowane do układu $n+1$ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki wielomianu $P_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, spełniającego dla pewnych z góry zadanych $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ warunki:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n & = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n & = f(x_1) \\ & \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n & = f(x_n). \end{cases}.$$

Wiemy już, że powyższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, a więc jego macierz współczynników jest odwracalna. Policzmy wyznacznik tej macierzy – zwanej macierzą Vandermonde'a.

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 4. *Zachodzi równość:*

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

[1] Mówiąc dokładniej, co zresztą za chwilę pokażemy, układ wielomianów p_i jest bazą przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż n, zaś współrzędne dowolnego innego wielomianu $f \in \mathbb{R}_n[X]$ w tej bazie to $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. To powinno się kojarzyć z bazą dualną. Rzeczywiście, rozważając liniowo niezależne funkcjonały $f \xrightarrow{\mu_i} f(x_i)$ w $(\mathbb{R}_n[X])^*$ widzimy, że stanowią one bazę dualną do zaprezentowanego wyżej układu wielomianów $p_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

Czy Czytelnik widzi, że wyznacznik Vandermonde'a pojawia się w określeniu wielomianów $p_i(x)$? Formuła ($\heartsuit$) nie ujawnia współczynników wielomianu interpolacyjnego, ale teraz widzimy, że mogą być one wyznaczone z wzorów Cramera. Widzimy tu duże podobieństwo do iloczynu postaci $A^{-1}b$, rozważanego w dowodzie wzorów Cramera. Kluczowy wniosek jest tu taki: wyznaczenie $\Delta(x_0, \ldots, x_n)$ zapewnia egzystencjalny dowód istnienia wielomianu interpolacyjnego, bez „zgadywania” wielomianów p_i.

Dowód. Indukcja ze względu na liczbę n. Dla $n = 1$ mamy: $\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$. Niech $n > 1$. Idea jest taka, by rozbić macierz Vandermonde'a na iloczyn macierzy i skorzystać ze wzoru Cauchy'ego i założenia indukcyjnego. Dokładniej, wystarczy pokazać, że:

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n). \qquad (\spadesuit)$$

Bierzemy macierz Vandermonde'a i odejmujemy pierwszy wiersz od pozostałych. Zrobimy to za pomocą mnożenia macierzy, żeby Czytelnik mógł się przekonać, że nie tylko macierze operacji elementarnych wykonują pewne operacje na wierszach macierzy, przez które pomnożyliśmy je z prawej strony:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \ldots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Macierz po prawej jest dolnotrójkatna i ma wyznacznik równy 1, co zgadza się z formułą Cauchy'ego i obserwacją mówiącą, że ciąg operacji typu (1) nie zmienia wyznacznika. Idźmy dalej. Uzyskana macierz jest blokowo górnotrójkątna, a zatem mamy (inaczej mówiąc: rozwijając względem pierwszej kolumny):

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \ldots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Teraz przedstawimy powyższą macierz w postaci iloczynu trzech macierzy Po pierwsze wyciągamy wspólne czynniki $x_i - x_0$ z każdego wiersza i korzystając ze wzorów skróconego mnożenia mamy:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 - x_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_1^{n-1-i} x_0^i \\ 1 & x_2 + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_2^{n-1-i} x_0^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_n^{n-1-i} x_0^i \end{pmatrix}.$$

Macierz po prawej wygląda nieco nieprzyjemnie, ale to się zmieni po rozbiciu jej na następujący iloczyn:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_2^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 0 & 1 & x_1 & \ldots & x_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

A zatem pokazaliśmy, że wyznacznik Vandermonde'a $\Delta(x_0, \ldots, x_n)$ równy jest w istocie iloczynowi wyznaczników trzech macierzy:

- macierzy diagonalnej o wyrazach $x_i - x_0$,
- macierzy Vandermonde'a o wyznaczniku $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$,
- macierzy górnotrójkątnej mającej jedynki na przekątnej.

A zatem z formuły Cauchy'ego mamy ($\spadesuit$), $\square$

W trakcie studiów wielokrotnie napotkają Państwo (mam nadzieję) powyższą macierz i wyznacznik. Ma on różne ciekawe zastosowania, a powyższe wyprowadzenie pokazuje również siłę dotychczas poznanych technik. W przyszłym, ostatnim tygodniu tego semestru, przyjrzymy się otwartej formule na wyznacznik, opartej o pojęcie permutacji. Również to pojęcie ma fundamentalne znaczenie w algebrze.