Wyznacznik macierzy kwadratowej

Ostatnia aktualizacja: 10.01.2022 r.

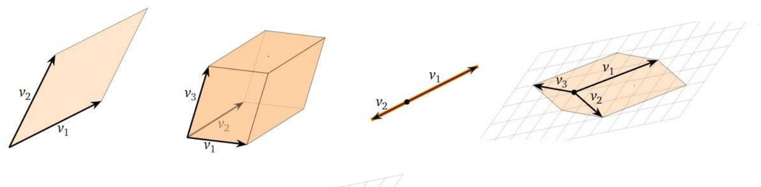
Zakończyliśmy podstawową część wykładu dotyczącą przekształceń liniowych. Kolejne trzy wykłady poświęcimy najbardziej chyba znanemu (z tych niebanalnych) pojęciu algebraicznemu: wyznacznikowi. Czytelnik mógł o nim słyszeć w kontekście układów równań i tak zwanych wzorów Cramera. Zagadnieniu temu poświęcimy kolejny wykład. Pojęcie wyznacznika można określić i badać w sposób czysto algebraiczny, co jest naszym celem na pozostałą część semestru. Wydaje się jednak zasadne, aby zacząć od intuicji i kontekstu geometrycznego, który rozwinięty będzie i poszerzony w ramach GAL II. Punktem wyjścia są podzbiory przestrzeni liniowej nad szczególnym, ale ważnym dla geometrii ciałem $\mathbb{R}$.

Definicja 1. ***Równoległościanem*** *rozpiętym na wektorach* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy podzbiór*

$$R(v_1, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \,|\, 0 \leqslant a_1, \ldots, a_n \leqslant 1\}.$$

Zauważmy, że powyższa definicja zakłada, że każdy równoległościan zawiera wektor zerowy. W drugim semestrze rozszerzymy tę definicję na odpowiednie podzbiory (euklidesowych) przestrzeni afinicznych. Łatwo widzieć, że dla przestrzeni niskich wymiarów równoległościany utożsamiać można z obiektami znanymi z geometrii. Na przykład równoległościan $R(v_1)$ utożsamiać można, dla niezerowego wektora v_1, z odcinkiem, zaś $R(v_1, v_2)$ utożsamić można dla nieproporcjonalnych v_1, v_2 – z równoległobokiem. Nierówności $0 \leqslant a_1, \ldots, a_n \leqslant 1$ mają sens dla ciała $\mathbb{R}$, choć można to założenie na różne sposoby osłabiać.

Poniżej przedstawionych jest kilka ilustracji równoległościanów, nawiązujących do definicji szkolnych. Pierwsze dwa (od lewej) rozpięte są przez układy liniowo niezależne, a kolejne dwa (odpowiednio w przestrzeniach dwu- i trójwymiarowej) rozpięte są przez układy liniowo zależne. Czym różnią się te sytuacje?



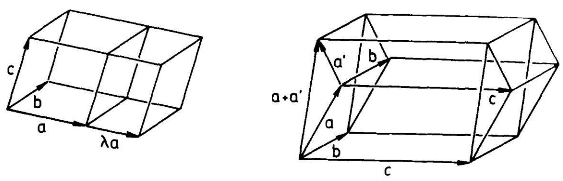
Dlaczego formułujemy taką definicję, zwłaszcza skoro dotyczy ona jedynie przestrzeni nad ciałem $\mathbb{R}$? Powodów algebraicznych jest kilka, ale nam chodzi o podkreślenie następującego zjawiska.

Uwaga 1. *Obraz równoległościanu przy przekształceniu liniowym przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}^n$ *w siebie jest równoległościanem. Innymi słowy, jeśli* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *to* $R(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) = \phi(R(v_1, \ldots, v_n))$.

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to obrazem wektora $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in R(v_1, \ldots, v_n)$ jest wektor $a_1\phi(v_1) + \ldots + a_n\phi(v_n) \in R(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n))$. A zatem $\phi(R(v_1, \ldots, v_n)) \subseteq R(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n))$. Z drugiej strony, biorąc dowolny układ $0 \leqslant c_1, \ldots, c_n \leqslant 1$ widzimy, że $c_1\phi(v_1) + \ldots + c_n\phi(v_n)$ jest obrazem wektora $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ przy ϕ, należącego do $R(v_1, \ldots, v_n)$, zatem dostajemy drugą inkluzję $R(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) \subseteq \phi(R(v_1, \ldots, v_n))$. □

Widzimy zatem, że w przypadku przestrzeni nad ciałem $\mathbb{R}$ podprzestrzenie liniowe nie są jedynym „typem podzbiorów” zachowywanych przy przekształceniach liniowych (jak wiemy – obraz podprzestrzeni przy przekształceniu liniowym jest podprzestrzenią). Z punktu widzenia geometrii równoległościany mają znaczenie w teorii zbiorów wypukłych. Z analitycznego czy topologicznego punktu widzenia – są to obiekty służące do (trywializując nieco temat) „opisu przez przybliżenia” bardziej skomplikowanych zbiorów. Podstawowym pojęciem opisującym równoległościany jest tzw. objętość (czy raczej: miara). Stanowi ono uogólnienie szkolnych pojęć długości, pola czy objętości. Poznamy je w drugim semestrze.

Spójrzmy na ilustrację równoległościanów $R(\lambda \cdot a, b, c)$ oraz $R(a + a', b, c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ oraz $\lambda > 0$



Rysunek 2. Źródło: K. Spindler, Abstract Algebra with Applications

Stosując znane fakty z geometrii szkolnej można pokazać, że „objętość” równoległościanu $R(\lambda \cdot a, b, c)$ równa jest λ razy „objętość” $R(a, b, c)$, zaś „objętość” $R(a+a', b, c)$ równa jest sumie „objętości” $R(a, b, c)$ oraz $R(a', b, c)$. Dlaczego stosujemy cudzysłów? Czy są różne „objętości”? Na ten moment naszym celem jest wyabstrahowanie własności „objętości” traktowanej jako funkcja na układzie wektorów i przyjrzenie się funkcjom z $M_n(K)$ do K mającym analogiczne własności. Ograniczymy się do konwencji, w której wektory rozpinające równoległościan są wierszami macierzy rozmiaru $n \times n$, a badane funkcje „o własnościach objętości” zachowują się w odpowiedni sposób. Jak się okaże (po porządnym wysiłku) w zasadzie istnieje tylko jedna taka funkcja. Skutki tego faktu wykraczają daleko poza algebrę liniową.

Definicja 2. *Dla każdego całkowitego $n \geqslant 1$ zbiór macierzy $M_{n\times n}(K)$ nazywamy zbiorem* ***macierzy kwadratowych rozmiaru n*** *i oznaczamy $M_n(K)$.*

Definicja 3. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ określamy macierze $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ otrzymane z A przez skreślenie odpowiednio i-tego wiersza i j-tej kolumny.*

Przykład: dla macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$ postaci $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ mamy:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Intuicja jest taka: chcemy określić funkcję $\det : M_n(K) \to K$, przypominającą „funkcję objętości”. Objętość często liczymy według formuł postaci: „długość/pole podstawy razy wysokość”. Ogólnie objętość obiektu w przestrzeni n wymiarowej wyznaczać chcemy za pomocą znajomości objętości $n-1$ oraz 1-wymiarowej. Okazuje się, że aby określić wyznacznik macierzy $A \in M_n(K)$ potrzebna jest znajomość:

- wyrazów macierzy w pierwszej kolumnie: $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$,
- wyznaczników macierzy rozmiaru $n-1$ postaci $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}$.

Definicja 4. *Definiujemy funkcję* $\det : M_n(K) \to K$ *w sposób rekurencyjny*

- *Dla $n = 1$ kładziemy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det(A) = a$, dla $A = [a]$.*
- *Dla $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ znając $\det : M_{n-1}(K) \to K$ wzorem:*

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.$$

Funkcję $\det : M_n(K) \to K$ *nazywamy* ***wyznacznikiem****. Czasem zamiast pisać* $\det A$ *piszemy* $|A|$.

Od razu warto dodać pewne doprecyzowanie. W zasadzie definiujemy ciąg funkcji – formalnie należałoby być może pisać (ale nikt tego nie robi) $\det_n : M_n(K) \to K$. Przy takiej konwencji mielibyśmy

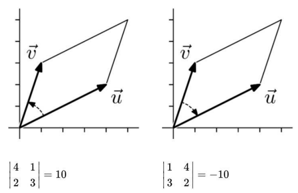
$$\det_n A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det_{n-1} A_{i1}.$$

Zacznijmy od kilku przykładów dla małych n.

- Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mamy $A_{11} = [2], A_{21} = [4]$, czyli:

  $$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det A_{21} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10.$$

  Ten wynik może budzić niepokój. Właśnie dowiedzieliśmy się, że funkcja mająca grać rolę objętości przyjmuje nad $\mathbb{R}$ ujemne wartości. To może wydawać się dziwne, ale za jakiś czas to się wyjaśni. Wiązać się to będzie z tzw. orientacją układu wektorów. Na razie intuicji niech dostarczy poniższy obrazek związany z pojęciem tzw. pola skierowanego.

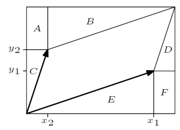


Rysunek 4. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

Ogólnie dla macierzy $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ mamy

$$|A| = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Osoby szukające związku powyższej formuły z polem zachęcam do porównania jej z poniższym rysunkiem:



Rysunek 5. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

- Dla $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ mamy $a_{11} = 4, a_{21} = 0, a_{31} = 0$, $\quad |A_{11}| = 11, |A_{21}| = 0, |A_{31}| = 0$, czyli

  $$\det A = 4 \cdot 11 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 44.$$

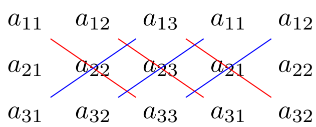
  Czytelnik zechce sobie narysować równoległościan rozpięty przez wektory $(4,0,0)$, $(0,2,-1)$, $(0,5,3)$ aby dostrzec, że w rozważanym przypadku liczenie wyznacznika pokrywa się praktyką liczenia objętości przez iloczyn pola podstawy i wysokości. A jaki jest wynik gdy zamiast $\mathbb{R}$ weźmiemy $\mathbb{Z}_{11}$?.
  Ogólnie dla macierzy

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

  mamy[1]:

  $$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} =$$
  $$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

  Formułę tą można uzyskać korzystając z tzw. metody Sarrusa, polegającej na wypisaniu obok macierzy A dwóch pierwszych jej kolumn. Wówczas trzy składniki powyższej sumy występujące ze znakiem + uzyskujemy przez iloczyn wyrazów połączonych na czerwono (rys. niżej), a trzy składniki ze znakiem $-$ uzyskujemy przez wymnożenie wyrazów połączonych na niebiesko.



Metodę tą wyjaśnimy, gdy poznamy wzór permutacyjny na wyznacznik. Analogiczne metody nie działają dla macierzy rozmiaru większego niż 3 (dla macierzy 2×2 metoda ta „działa" bez dopisywania kolumn). Rozważmy jeszcze jeden ogólny przykład, rozwijający nieco powyższy. Wcześniej ważna definicja.

Definicja 5. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Zbiór wyrazów $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ nazywamy **przekątną** lub **diagonalą** macierzy A. Powiemy, że A jest:*

- ***górnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i > j$*
  (czyli pod przekątną macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- ***dolnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $j > i$*
  (czyli nad przekątną macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- ***diagonalna**, jeśli jest jednocześnie górnotrójkątna i dolnotrójkątna.*

Geometrycznie mówiąc macierz diagonalna o niezerowych wyrazach na diagonali reprezentuje równoległościan o prostopadłych krawędziach. Sugeruje to, że wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem wyrazów na jej przekątnej. Tak istotnie jest, i to nie tylko dla macierzy diagonalnej.

[1]Będziemy często rozpatrywać iloczyny wyrazów macierzy. Mnożenie w ciele jest przemienne i przyjmować będziemy tzw. zasadę porządku leksykograficznego: najpierw pisząc czynniki z wierszy o mniejszych indeksach. Na przykład zamiast $a_{21}a_{12}$ piszemy raczej $a_{12}a_{21}$, a zamiast $a_{32}a_{21}a_{13}$ piszemy $a_{13}a_{21}a_{32}$. Jest to bardziej eleganckie i ma swój głębszy sens.

Uwaga 2. *Jeśli $A \in M_n(K)$ jest macierzą górnotrójkątną (na przykład: macierzą w postaci schodkowej), to jej wyznacznik równy jest iloczynowi wyrazów na przekątnej.*

Dowód. Dowodzimy tezę przez indukcję. Dla $n = 1$ wynika ona wprost z definicji. Weźmy zatem macierz $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ oraz zauważmy, że $a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$, a zatem z definicji wyznacznika mamy

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11}.$$

Macierz A_{11} powstaje z A przez usunięcie pierwszego wiersza i kolumny. Skoro A jest górnotrójkątna, to również A_{11} jest górnotrójkątna. A zatem z założenia indukcyjnego $\det A_{11} = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. □

Czytelnik mógłby spytać czy to, że liczymy wyznacznik „za pomocą pierwszej kolumny”, to znaczy – mnożąc (z odpowiednim znakiem) wyrazy pierwszej kolumny przez wyznaczniki odpowiednich macierzy rzeczywiście zależy od wyboru pierwszej kolumny? Okazuje się, że tak nie jest. Sposób liczenia wyznacznika opisany w definicji oparty o korzystanie z wyznaczników macierzy mniejszego rodzaju oraz wyrazów pierwszej kolumny zwany jest obliczaniem wyznacznika za pomocą rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny. Można pytać czy możliwe jest obliczenie wyznacznika za pomocą rozwinięcia względem innych kolumn, albo nawet wierszy? Innymi słowy, czy mając macierz $A \in M_n(K)$ oraz znając:

- wyrazy macierzy w i-tym wierszu (odp. j-tej kolumnie): $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ (odp. $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$),
- wyznaczniki macierzy rozmiaru $n-1$ postaci $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ (odp. $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$)

mamy na przykład formuły

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}? \qquad (\dagger)$$

Okazuje się, że tak jest i pokażemy to za pomocą ogólnych twierdzeń dotyczących wyznacznika traktowanego jako funkcja objętości. Alternatywne rozumowania, oparte po prostu na rachunkach, można znaleźć w skrypcie wydziałowym dra T. Koźniewskiego. Przykładowym skutkiem (†) jest dowód poniższej uwagi.

Uwaga 3. *Jeśli $A \in M_n(K)$ jest macierzą dolnotrójkątną, to jej wyznacznik równy jest iloczynowi wyrazów na przekątnej.*

Dowód. Dowodzimy tezę przez indukcję. Dla $n = 1$ wynika ona wprost z definicji. Weźmy zatem macierz $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ oraz zauważmy, że $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$, a zatem z definicji wyznacznika oraz z wzoru (†) mamy (rozwinięcie względem pierwszego wiersza: $\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11}$. Macierz A_{11} powstaje z A przez usunięcie pierwszego wiersza i kolumny. Skoro A jest dolnotrójkątna, to również A_{nn} jest dolnotrójkątna. A zatem z założenia indukcyjnego $\det A_{nn} = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. □

Powyższe fakty dają już Czytelnikowi sporą bazę do wykonywania rachunków na ćwiczeniach. Czas przejść do dowodów. Wcześniej jednak sformułujemy jeszcze jeden wynik – dla zebrania w jednym miejscu podstawowych metod liczenia wyznaczników. Gdy zakończymy wszystkie dowody, fakt ów będzie jednym z natychmiastowych skutków (a po drodze pojawi się jeszcze jeden).

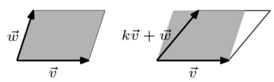
Twierdzenie 1. *Rozważmy funkcję* $\det : M_n(K) \to K$. *Wówczas*

(1) dodanie jednego wiersza do drugiego nie zmienia wyznacznika[2]: jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez dodanie wartości jednego wiersza do innego, to $\det(A') = \det(A)$,

(2) przestawienie wierszy zmienia znak wyznacznika, tzn. jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch wierszy, to $\det(A') = -\det(A)$.

(3) pomnożenie wiersza przez skalar implikuje mnożenie wyznacznika przez ten skalar: jeśli macierz A' została otrzymana z macierzy A przez pomnożenie pewnego wiersza przez c, to $\det(A') = c \cdot \det(A)$.

[2]Osoby zainteresowane interpretacją geometryczną tego punktu zachęcam do kontemplacji poniższego obrazka:



Rysunek 6. Źródło: Jim Hefferon, `https://hefferon.net/linearalgebra/`.

Łącząc powyższe twierdzenie z obserwacją mówiącą, że wyznacznik macierzy górnotrójkątnej jest iloczynem wyrazów na przekątnej dostajemy prosty algorytm liczenia wyznacznika (inaczej niż z rozwinięcia Laplace'a) poprzez „schodkowanie”: aby policzyć $|A|$ sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej A' operacjami typu (1) i (2). Wyznacznik A' to po prostu iloczyn wyrazów na przekątnej. Mamy też $|A| = (-1)^k \cdot |A'|$, gdzie k oznacza liczbę operacji typu (2) użytych przy sprowadzaniu A do A'.
Przykład (kolokwium, rok 2019). Obliczyć $\det A$, gdzie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest postaci:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie. (a) Załóżmy, że $n > 1$. Odejmujemy pierwszy wiersz macierzy A od pozostałych i otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Następnie od ostatniego wiersza odejmujemy wiersze $2, 3, \dots, n-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

gdzie $a = (n-1) - 1 - 2 - 3 - \dots - (n-2) = (n-1) - (n-1)(n-2)/2 = -(n-1)(n-4)/2$. Powyższe operacje nie zmieniają wyznacznika, a uzyskana macierz jest (górno)trójkątna; mamy więc

$$\det(A) = (n-2)!(-(n-1)(n-4))/2 = -(n-1)!(n-4)/2.$$

Argumenty prowadzące do (†) rozpoczniemy od pokazania, że det zachowuje się jak objętość. Określmy teraz własności odwołujące się do intuicji objętości rozważanych na początku wykładu. Oto one.

Definicja 6. *Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest* ***jednorodna względem k-tego wiersza****, jeśli dla każdej $A \in M_n(K)$ oraz dla każdego $c \in K$ $f(A') = c \cdot f(A)$, gdzie A' powstaje z A przez pomnożenie k-tego wiersza przez c.*

Chcemy, by wyznacznik był funkcją jednorodną względem każdego wiersza – zgodnie z punktem (3) Twierdzenia 1. Odpowiada to również intuicji geometrycznej związanej z wydłużaniem krawędzi równoległościanu. Wydłużając dowolną z jego krawędzi λ razy spodziewamy się, że objętość wzrośnie λ razy.

Definicja 7. *Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest* ***addytywna względem k-tego wiersza****, jeśli dla każdej trójki macierzy $A, B, C \in M_n(K)$ takiej, że:*

- *k-ty wiersz macierzy C to suma k-tego wiersza A oraz k-tego wiersza B,*
- *l-te macierzy A, B, C są identyczne, dla $l \neq k$.*

zachodzi $f(C) = f(A) + f(B)$.

Również własność addytywności widzieliśmy już na poziomie intuicji na rysunku 2. Rozbijając jeden z wektorów rozpinających równoległościan na sumę dwóch, dostajemy rozbicie równoległościanu na dwa równoległościany, których „zorientowane” objętości dodają się do objętości wyjściowego.

Twierdzenie 2. *Funkcja* $\det : M_n(K) \to K$ *jest jednorodna i addytywna względem każdego wiersza.*

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ – jasne. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mnożymy k-ty wiersz A przez $c \in K$ dostając B. Wówczas:

- $B_{k1} = A_{k1}$,
- dla $j \neq k$ każda z macierzy B_{j1} powstaje z A_{j1} przez pomnożenie pewnego wiersza przez stałą. Z założenia indukcyjnego $\det B_{j1} = c \det A_{j1}$.

Zatem:

$$\det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} c a_{k1} \det B_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det B_{n1} =$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} c \det A_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} c a_{k1} \det A_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} c \det A_{n1} = c \cdot \det A.$$

Pokazujemy teraz addytywność zdefiniowanej na początku funkcji det. Chcemy pokazać, że:

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} + y_{k1} & \ldots & x_{kn} + y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Z} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \ldots & x_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \ldots & y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Zauważmy, że:

- $Z_{k1} = Y_{k1} = X_{k1}$,
- dla $j \neq k$ macierze Z_{j1}, Y_{j1}, X_{j1} różnią się tylko k-tym wierszem, przy czym k-ty wiersz Z_{j1} jest sumą k-tych wierszy Y_{j1} oraz X_{j1}. Z założenia indukcyjnego mamy zatem
$$\det Z_{j1} = \det X_{j1} + \det Y_{j1}.$$

Stąd:

$$\det Z = (-1)^{1+1} a_{11} \det Z_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} (x_{k1} + y_{k1}) \det Z_{k1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det Z_{n1} =$$
$$= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{j1} (\det X_{j1} + \det Y_{j1}) + (-1)^{k+1} x_{k1} \det X_{k1} + y_{k1} \det Y_{k1} = \det X + \det Y$$

□

Wniosek 1. *Jeśli* $A \in M_n(K)$ *oraz* A *ma zerowy wiersz, to* $\det(A) = 0$.

Uwaga 4. *Jeśli dwa sąsiednie wiersze macierzy* $A \in M_n(K)$ *są identyczne, dla* $n \geqslant 2$*, wówczas* $\det A = 0$.

Dowód. Dowód to indukcja ze względu na n. Dla $n = 2$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że $n > 2$ oraz identyczne są i-ty oraz $i+1$-ty wiersz macierzy $A = [a_{ij}]$, czyli dla $1 \leqslant k \leqslant n$ mamy $a_{ik} = a_{i+1,k}$.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że:

- $A_{i1} = A_{i+1,1}$
- dla $k \neq i, i+1$ macierze A_{k1} mają dwa identyczne wiersze, a więc z zał. indukcyjnego $\det A_{k1} = 0$.

Zatem $\det A$ równy jest:

$$\sum_{k \neq i, i+1} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+1+1} a_{i+1,1} \det A_{i+1,1} = (-1)^{i+1} (1-1) a_{i1} \det A_{i1} = 0.$$

□

Przejdziemy teraz do następującego dość skomplikowanego rezultatu, który da nam po drodze Twierdzenie 1, zbliży nas do dowodu (†) oraz uzmysłowi co mamy na myśli mówiąc, że z dokładnością do stałej objętość można zadać na jeden sposób.

Twierdzenie 3. *Dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\phi : M_n(K) \to K$, taka, że:*

1. *Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ funkcja ϕ jest jednorodna względem k-tego wiersza.*
2. *Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ funkcja ϕ jest addytywna względem k-tego wiersza.*
3. *$\phi(A) = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.*
4. *$\phi(I_n) = 1$.*

Z naszych dotychczasowych rozważań wynika, że funkcja det spełnia powyższe warunki. Twierdzimy, że żadnej innej funkcji spełniającej te warunki nie ma. Pierwsze dwa warunki rozumiemy już dość dobrze, także pod kątem geometrii. Warunek (3) to pewne uproszczenie oczekiwania, że objętość równa jest zero dla równoległościanów rozpiętych na liniowo zależnych układach wektorów. Można pokazać, że dla ciał charakterystyki różnej od 2 warunek (3) jest równoważny temu, ze $\phi(A)$ zeruje się dokładnie na macierzach nieodwracalnych. Warunek (4) mówi natomiast, że objętość „kostki jednostkowej" równa jest 1. Innymi słowy – z dokładnością do określenia „jednostki" jest jedna „funkcja objętości" – det.

Dowód. Idea dowodu polega na pokazaniu, że funkcja spełniająca warunki (1)-(4) musi spełniać założenia z Twierdzenia 1. Następnie pokażemy, że ϕ jest jednoznacznie określona na macierzach operacji elementarnych co po dalszym rozumowaniu (i dzięki uzyskanym niedawno własnościom macierzy operacji elementarnych) pozwoli stwierdzić, że dla każdej macierzy może ona przyjmować tylko jedną wartość. A zatem zaczynamy od badania własności funkcji spełniających (1)-(4) przy operacjach elementarnych.

Lemat 1. *Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ powstaje z macierzy C przez zamianę dwóch sąsiednich wierszy, to $\phi(C) = -\phi(C')$.*

Dowodzimy lemat. Niech wiersze macierzy C mają postać $w_1, \ldots, w_n$. Niech C' powstaje z C przez zamianę wiersza k-tego i $k+1$-wszego. Na mocy własności (2) i (3) funkcji ϕ:

$$\underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k + w_{k+1} \\ w_k + w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} = \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(C)} + \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(C')}$$

Lemat 2. *Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli macierz $C \in M_n(K)$ ma dwa identyczne wiersze, to $\phi(C) = 0$.*

Uzasadnienie: za pomocą skończenie wielu operacji zamiany wierszy możemy zamienić C w macierz C' o dwóch sąsiednich wierszach równych. Z Lematu 1 mamy $\phi(C) = \pm\phi(C') = 0$.

Lemat 3. *Załóżmy, że funkcja $\phi : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\phi(B) = \phi(A)$.*

Schemat uzasadnienia, korzystający z poprzednich wyników:

$$\underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l + aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(B)} = \phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\phi(A)} + a \cdot \underbrace{\phi\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0}.$$

Kolejne lematy są zarazem kluczowymi rezultatami dotyczącym wyznacznika, który jak wiemy spełnia warunki (1)-(4), Dlatego odtąd zamiast notacji używającej ϕ używamy symbolu det. Zaczniemy od odnotowania, że pierwsze trzy lematy konstytuują dowód Twierdzenia 1. Wysłowimy go jednak w następujący sposób, prowadzący do kolejnych ważnych wyników.

Lemat 4. *Załóżmy, że funkcja* $\det : M_n(K) \to K$ *spełnia warunki (1)-(4). Niech* M *będzie macierzą operacji elementarnej oraz* $A \in M_n(K)$. *Wówczas:*

$$\det MA = \begin{cases} \det A, & \text{dla } M \text{ dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -\det A, & \text{dla } M \text{ zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c \cdot \det A, & \text{dla } M \text{ mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W szczególności dla $A = I_n$ *mamy*

$$\det M = \begin{cases} 1, & \text{dla } M \text{ dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -1, & \text{dla } M \text{ zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c, & \text{dla } M \text{ mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W każdym z opisanych przypadków zachodzi równość

$$\det MA = \det M \cdot \det A. \qquad (\diamondsuit)$$

Wynik ten wynika natychmiast z interpretacji operacji elementarnych w języku mnożenia macierzy.

Kolejny wynik pomocniczy ma jednocześnie fundamentalne znaczenie dla całego wykładu.

Lemat 5. *Załóżmy, że funkcja* $\det : M_n(K) \to K$ *spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej* $A \in M_n(K)$ *równoważne są warunki:*

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A *jest odwracalna.*

Aby pokazać ten rezultat przypomnijmy, że jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

Stosując wiele razy Lemat 4 i formułę $(\diamondsuit)$ mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

W rezultacie $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$ (bo $\det M_i$ są zawsze niezerowe). Skoro A jest kwadratowa, to są dwie możliwości:

- $A' = I$,
- A' ma zerowy wiersz.

Twierdzimy, że w pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$. Rzeczywiście, jeśli A' ma zerowy wiersz, to dodając do tego wiersza inny wiersz dostajemy macierz A'' o dwóch identycznych wierszach. A zatem $\det A'' = 0$, zgodnie z Lematem 2. Jednocześnie $\det A' = \det A''$ (A'' powstaje przez dodanie wiersza A' do innego), czyli $\det A' = 0$. W rezultacie:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I.$$

Dwa wykłady temu pokazywaliśmy natomiast, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna, co kończy dowód.

Powyższy wynik potrzebny jest nam w tym momencie do uzasadnienia następującego rezultatu.

Lemat 6 (Wzór Cauchy'ego)**.** *Załóżmy, że funkcja* $\det : M_n(K) \to K$ *spełnia warunki (1)-(4). Niech* $A, B \in M_n(K)$. *Wówczas:*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Dowód wzoru Cauchy'ego rozbija się na dwa przypadki.

- Przypadek 1. Macierz AB nie jest odwracalna. Zgodnie z Lematem 5 mamy $\det AB = 0$. Oznacza to, że $\det A = 0$ lub $\det B = 0$. Inaczej na mocy Lematu 5 macierze A, B byłyby odwracalne, a z nimi i AB, bo jak wiadomo $(AB) \cdot B^{-1}A^{-1} = I$.

- Przypadek 2. Załóżmy, że AB jest odwracalna. Zgodnie z wynikiem wyżej $r(AB) = n$, a wiemy z wcześniejszych wykładów[3], że to oznacza, że $r(A) = n$ oraz $r(B) = n$. Z Lematu 5 mamy $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$, więc $\det AB \neq 0$. W szczególności postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I. Mówiąc inaczej: istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ oraz $N_1, \ldots, N_t$ takie, że

$$I = M_1M_2M_3 \ldots M_sA, \quad I = N_1N_2N_3 \ldots N_tB.$$

Zatem $A = M_s^{-1}M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}, \quad B = N_t^{-1}N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1}$. Ale M_i^{-1} oraz N_j^{-1} to macierze operacji elementarnych, więc z Lematu 4, a dokładniej formuły ($\diamondsuit$):

$$\begin{aligned}\det AB = \det {\color{red}M_s^{-1}M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}}{\color{blue}N_t^{-1}N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1}} &= \\ = \det {\color{red}M_s^{-1}} \det {\color{red}M_{s-1}^{-1}} \ldots \det {\color{red}M_1^{-1}} \det {\color{blue}N_t^{-1}} \det N_{t-1}^{-1} \ldots \det {\color{blue}N_1^{-1}} &= \\ = \det M_s^{-1}M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1} \det N_t^{-1}N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1} &= \det A \det B.\end{aligned}$$

Pozostało dokończyć uzasadnienie twierdzenia. Mianowicie twierdzimy, że wartość funkcji det spełniającej $(1)-(4)$ jest jednoznacznie wyznaczona, dla każdej macierzy $A \in M_n(K)$. Rzeczywiście:

- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$, zgodnie z Lematem 5.

- Jeśli A jest odwracalna to algorytm Gaussa podaje jednoznaczny, najkrótszy możliwy ciąg operacji elementarnych pozwalających na sprowadzenie A do postaci zredukowanej I. Niech macierze tych operacji to $M_1, \ldots, M_s$. Na mocy wzoru Cauchy'ego:

$$1 = \det I = \det M_s \det M_{s-1} \ldots \det M_1 \det A.$$

Zatem gdy A jest odwracalna, to

$$\det A = (\det M_s \det M_{s-1} \ldots \det M_1)^{-1},$$

gdzie $M_1, \ldots, M_s$ jest jednoznacznie wyznaczonym ciągiem macierzy operacji elementarnych. Skoro znamy $\det M_i$, to $\det A$ jest wyznaczona jednoznacznie, co kończy dowód twierdzenia.

□

Odnotujmy ważny wniosek ze wzoru Cauchy'ego, kluczowy do dowodu własności (†).

Uwaga 5. *Dla każdej* $A \in M_n(K)$ *mamy* $\det A = \det A^T$.

Dowód. Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Rozważamy dwa przypadki.

- Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.

- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych

$$A = M_1M_2 \ldots M_s.$$

Zatem zgodnie ze wzorem $(XY)^T = Y^TX^T$ mamy: $A^T = M_s^TM_{s-1}^T \ldots M_1^T$. Łatwo sprawdzić, że dla każdej macierzy operacji elementarnej M mamy $\det M = \det M^T$. Rzeczywiście, dla macierzy operacji typu (2) i (3) po prostu mamy $M = M^T$. Co do macierzy operacji (1) to przecież M^T jest również macierzą operacji typu (1), a wszystkie te macierze mają wyznacznik równy 1, zgodnie z Lematem 4. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego:

$$\det A = \det M_1 \det M_2 \ldots \det M_s = \det M_s^T \det M_{s-1}^T \ldots \det M_1^T = \det A^T.$$

□

[3]Przykładowe argumenty: (1) AB to macierz izomorfizmu będącego złożeniem przekształceń o macierzach A oraz B, co oznacza, że A to macierz monomorfizmu, a B – macierz epimorfizmu. Ale te przekształcenia działają pomiędzy przestrzeniami wymiaru n, więc to izomorfizmy., że skoro $A, B \in M_n(K)$. Zatem A, B są odwracalne. (2) Mamy $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

Pozostało uzasadnić wzór (†) mówiący, że obliczanie wyznacznika za pomocą rozwinięcia względem dowolnego wiersza i dowolnej kolumny daje ten sam wynik (przy założeniu, że wiemy, że fakt ten zachodzi dla macierzy mniejszego rozmiaru i nie martwimy się jak policzyć wyznaczniki macierzy typu A_{ij}). Argumenty są następujące:

- Analogicznie jak w dowodach Uwagi 2, Twierdzenia 2 oraz Uwagi 4 pokazujemy, że funkcje postaci $d_k : M_n(K) \to K$ określone przez rozwinięcie względem s-tej kolumny spełniają warunki (1)-(4), a zatem zgodnie z Twierdzeniem 3, funkcje z $M_n(K) \to K$ zadające rozwinięcia względem poszczególnych kolumn są równe.

- Korzystając z tego, że $\det A = \det A^T$ zauważamy, że funkcja $w_k : M_n(K) \to K$ określona przez rozwinięcie względem k-tego wiersza równa jest funkcji określonej przez rozwinięcie względem k-tej kolumny. Istotnie, z założenia:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det (A_{ik})^T$$

  Wyrazy $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ to wyrazy i-tej kolumny macierzy A^T, zaś $(A_{ik})^T$ powstaje z usunięcia z A^T k-tego wiersza i n-tej kolumny. A zatem po prawej stronie znajduje się $\det A^T = \det A$.

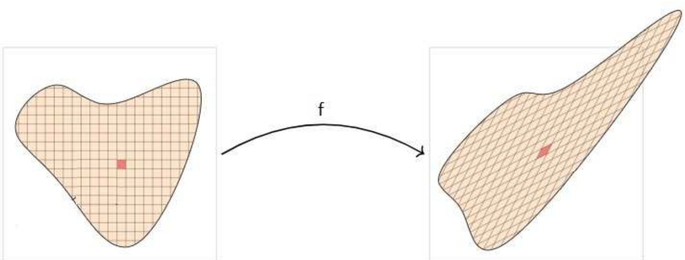
Trzeba rozumieć, że nie wpadamy tu w błędne koło (dotyczy to też wcześniejszych dowodów indukcyjnych). W języku komentarza poczynionego po definicji wyznacznika – gdybyśmy zdefiniowali funkcje

$$\overset{w_i}{\underset{2}{\det}}, \overset{k_j}{\underset{2}{\det}},$$

dla $i, j \in \{1, 2\}$, działające na $M_2(K)$ i określone przez rozwinięcia względem, odpowiednio, i-tego wiersza lub j-tej kolumny, to analogicznie jak w przypadku $\det_2^{k_1}$ pokazalibyśmy, że wszystkie te funkcje spełniają (1)-(4), a to znaczy, że są jedną i tą samą funkcją, którą określić można jako $\det_2 : M_2(K) \to K$. Teraz dla $n = 3$ można rozważyć funkcje $\overset{w_i}{\underset{3}{\det}}, \overset{k_j}{\underset{3}{\det}}$, zdefiniowane za pomocą $\det_2$, i znowu pokazalibyśmy, ze one wszystkie spełniają (1)-(4), więc w istocie jest jedna $\det_3 : M_n(K) \to K$, której są one wszystkie równe...

Wzór (†) jest zatem uzasadniony, z dokładnością do prostych powtórzeń dowodów. Wniosek jest następujący. Licząc wyznaczniki konkretnych macierzy możemy korzystać zamiennie z różnych rozwinięć: jeśli na przykład sprowadzimy przez rozwinięcie względem drugiej kolumny obliczenie wyznacznika macierzy 4×4 do obliczenia czterech wyznaczników macierzy 3×3, to każdy z tych czterech wyznaczników możemy liczyć za pomocą innego rozwinięcia – możemy korzystać za równo z rozwinięć na wierszach i na kolumnach.

Uzasadniliśmy też, że wyznacznik zachowuje się – przynajmniej dla równoległościanów – jak funkcje znane ze szkoły jako długość, pole czy objętość. Dokładniej pojęcia te poznamy w drugim semestrze. Odnotujmy na koniec jeszcze jedną ważną intuicję: to jak zmienia się objętość (miara) zbioru przy przekształceniu liniowym to rzecz kluczowa np. dla liczenia całek. W przyszłym semestrze okaże się, że dla danego przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stosunek „objętości” równoległościanu i jego obrazu jest niezależny od wyboru równoległościanu. Równy jest on natomiast co do modułu wyznacznikowi macierzy tego przekształcenia postaci $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$. W kontekście analitycznym fakt ten ma fundamentalne znaczenie, o czym intuicyjnie w komentarzu niżej.



Rysunek 3. Miary nieliniowych zbiorów można przybliżać miarami (prawie) rozłącznych sum równoległościanów, a własności porządnych funkcji wielu zmiennych można zrozumieć przybliżając je lokalnie funkcjami liniowymi (afinicznymi). Na GALu poznajemy podstawowe „klocki” i ich własności. Na drugim roku na analizie i topologii będą Państwo się uczyć co to znaczy „prawie”, „miara”, „przybliżać”, „porządnych”, „lokalnie”. A na algebrze abstrakcyjnej będą... bardziej skomplikowane „klocki”.

Ostatnią część tego (dość długiego) wykładu poświęcimy kilku uwagom o wyznaczniku macierzy blokowej. Zacznijmy od definicji.

Definicja 8. *Niech $A \in M_n(K)$ oraz $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, dla pewnych całkowitych $n_1, \ldots, n_k, k > 0$. Niech macierz $D_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$, zwana dalej* ***blokiem*** *A względem podziału $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$), powstaje z macierzy A przez:*

- *usunięcie wszystkich wierszy poza wierszami o indeksach $n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i$,*
- *usunięcie wszystkich kolumn poza kolumnami o indeksach $n_1 + \ldots + n_{j-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{j-1} + n_j$,*

przy czym przyjmujemy $n_0 = 0$. Wówczas mówimy, że macierz A jest w ***postaci blokowej*** *(D_{ij}) (względem rozbicia $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$), co oznaczamy często w następujący sposób:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1k} \\ \hline D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2k} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline D_{k1} & D_{k2} & \ldots & D_{kk} \end{array}\right) \quad \textit{lub prościej} \quad A = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1k} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k1} & D_{k2} & \ldots & D_{kk} \end{pmatrix}.$$

Bloki D_{ii} nazywamy blokami diagonalnymi. Co więcej, macierz A nazywamy:

- ***blokowo górnotrójkątną****, jeśli istnieje rozbicie $n = n_1 + \ldots + n_k$ na dodatnie składniki takie, że postać blokowa (D_{ij}) macierzy A względem tego rozbicia spełnia $D_{ij} = 0$, dla $i > j$,*
- ***blokowo dolnotrójkątną****, jeśli istnieje rozbicie $n = n_1 + \ldots + n_k$ na dodatnie składniki takie, że postać blokowa (D_{ij}) macierzy A względem tego rozbicia spełnia $D_{ij} = 0$, dla $i < j$,*
- ***blokowo diagonalną****, jeśli jest jednocześnie blokowo górnotrójkątna i blokowo-dolnotrójkątna, dla pewnego podziału $n = n_1 + \ldots + n_k$.*

Powyższa notacja może wydawać się nieco niespójna z notacją przyjętą w definicji wyznacznika, ale zwykle nie będziemy używać oznaczenia D_{ij} poza powyższą definicją. Macierze blokowe będą odgrywały olbrzymią rolę w naszych rozważaniach w przyszłym semestrze. W tym momencie pokażemy jedynie następujący, fundamentalny fakt, stanowiący uogólnienie Uwag 2 oraz 3 (dla rozbicia $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ macierz blokowo górnotrójkątna to po prostu macierz górnotrójkątna, analogicznie dla dolnotrójkątnej).

Uwaga 6. *Niech A będzie macierzą blokowo górnotrójkątną lub blokowo dolnotrójkątną o blokach diagonalnych $D_{11}, \ldots, D_{kk}$. Wówczas* $\det A = \det D_{11} \cdot \det D_{22} \cdot \ldots \det D_{kk}$.

Dowód. Pokażmy najpierw tezę dla macierzy blokowo górnotrójkątnej rozmiaru $n \times n$ postaci:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Rozumowanie jest indukcją ze względu na rozmiar n macierzy X. Oczywiście teza zachodzi dla $n = 2$ i macierzy o czterech blokach rozmiarów 1×1. Niech $n > 2$. Niech pierwsza kolumna macierzy A ma wyrazy $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}$. Liczymy wyznacznik przez rozwinięcie względem pierwszej kolumny, otrzymując

$$\det X = (-1)^{1+1} a_{11} \det X_{11} + \ldots + (-1)^{k+1} a_{k1} \det X_{k1}.$$

Rzeczywiście, kolejne $n - k$ składników rozwinięcia zawiera czynnik x_{j1}, który dla $j > k$ równy jest zero. Zauważmy też, że X_{i1} są, dla $1 \leqslant i \leqslant k$ macierzami blokowo-górnotrójkątnymi postaci

$$X_{i1} = \begin{bmatrix} A_{i1} & * \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

A zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym

$$\det X_{i1} = \det A_{i1} \cdot \det D.$$

W ten sposób uzyskujemy krok indukcyjny, bowiem:

$$\det X = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} \cdot \det D + \ldots + (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} \cdot \det D = \det A \cdot \det D.$$

Dla macierzy blokowo-górnotrójkątnej o więcej niż 2 blokach rozumowanie jest prostą indukcją ze względu na liczbę bloków. Zauważmy bowiem, że macierz o $k > 1$ blokach diagonalnych $D_{11}, \ldots, D_{kk}$ traktować można jako macierz o dwóch blokach diagonalnych: D_{11} oraz bloku, którego blokami diagonalnymi są $D_{22}, \ldots, D_{kk}$. Rozumowanie dla macierzy blokowo dolnotrójkątnych wynika natomiast natychmiast z tego, że wyznacznik nie zmienia się przy transponowaniu, a transpozycja macierzy blokowo górnotrójkątnej jest macierzą blokowo dolnotrójkątną. $\square$