Diagramy. Funkcjonały liniowe i przestrzeń sprzężona

Ostatnia aktualizacja: 21.12.2021 r.

Dzisiejszym wykładem zamykamy rozważania dotyczące przekształceń liniowych. Przed nami stosunkowo abstrakcyjne pojęcie funkcjonału oraz zagadnienia dualności, bezpośrednio z nim związane. Na poprzednich wykładach powiedzieliśmy sporo o złożeniach przekształceń liniowych i ich interpretacji w języku mnożenia macierzy. Gdy rozważamy złożenia przekształceń liniowych, zapis „funkcyjny” jest często niezmiernie kłopotliwy. Często uniemożliwia on widzenie całej struktury złożeń tych przekształceń i odniesień pomiędzy odpowiednimi przestrzeniami. Aby radzić sobie jakoś z tym zjawiskiem przekształcenia (i obiekty, które one ze sobą wiążą) reprezentujemy często przy pomocy **diagramów**. Jest to spojrzenie charakterystyczne dla nowoczesnej matematyki, czerpiącej silnie z tak zwanej teorii kategorii (powiemy o niej w dalszych wykładach).

Czym więc są owe diagramy? Zacznijmy od przykładu. Fakt istnienia złożenia przekształceń $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ postaci $\psi \circ \phi : V \to Z$ opisujemy na diagramie w następujący sposób:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

W diagramie zawrzeć można warunki charakteryzujące ważne przekształcenia liniowe. Na przykład warunek sformułowany w następujący sposób: Spośród przekształceń liniowych $f : V \to W$ monomorfizmy są jedynymi przekształceniami takimi, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $g : W \to V$, że:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V"'] & W \arrow[d, dashed, "g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Ogólniej **diagramem przekształceń liniowych** nazywać będziemy graf skierowany, którego wierzchołki etykietowane są przestrzeniami liniowymi (lub nie – jeśli mowa o dowolnych przestrzeniach), a krawędzie – przekształceniami liniowymi pomiędzy nimi. Podstawowym diagramem jest **ciąg**, czyli diagram postaci:

$$V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \quad (\star)\ .$$

Złożenie $\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_1$ nazwiemy **złożeniem** wzdłuż ciągu $(\star)$. Powiemy, że diagram przekształceń jest **przemienny**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków V, W tego diagramu, złożenia wzdłuż dowolnych dwóch ciągów tego diagramu o początkach w V i końcach w W są sobie równe (jako przekształcenia). Dla przykładu poniższy diagram jest przemienny, o ile $\phi_2 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \psi_1$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & B \arrow[d, "\phi_2"] \\ C \arrow[r, "\psi_2"] & D \end{tikzcd}$$

Diagramy to ważne narzędzia w definiowaniu nowych przekształceń (i nie tylko) przy pomocy starych. Przekonamy się o tym wkrótce. Drugim ważnym aspektem związanym z diagramami są tzw. własności uniwersalne. Oto przykład takiej własności. Zachęcam do próby dowodu tego faktu.

Uwaga 1. *Niech X będzie przestrzenią liniową wraz z podprzestrzeniami X_1, X_2 oraz epimorfizmami $\pi_1 : X \to X_1$ oraz $\pi_2 : X \to X_2$. Wówczas $X = X_1 \oplus X_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej przestrzeni liniowej Y oraz przekształceń liniowych $f_1 : Y \to X_1$ oraz $f_2 : Y \to X_2$ istnieje* ***dokładnie jedno przekształcenie*** *$f : Y \to X$ takie, że przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_1 & X \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Nie jest naszym celem tworzenie jakiejkolwiek teorii w oparciu o język diagramów przemiennych. Przedmiotem tym zajmuje się teoria kategorii, o której jeszcze będziemy w przyszłości mówić. Na ten moment chcemy mieć po prostu swobodę korzystania z formułowania definicji czy obserwacji w języku podobnym do powyższego. Będziemy to oczywiście robić z pewną dozą ostrożności.

Definicja 1. ***Funkcjonałem liniowym*** *(albo* ***formą liniową****) na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór $V^* = L(V, K)$ funkcjonałów liniowych na przestrzeni V nazywamy* ***przestrzenia sprzężoną*** *(lub* ***dualną****) do V.*

Przykłady.

- $f \in (\mathbb{Q}^3)^*$ zadany wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$.

  Wiemy już z wcześniejszych wykładów, że dla każdego elementu $\phi \in (K^n)^*$ istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że ϕ zadana jest wzorem

$$\phi((x_1, \ldots, x_n)) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n.$$

- $tr \in (M_{n\times n}(\mathbb{R}))^*$ zadany wzorem $tr([a_{ij}]) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$
- Niech X będzie niepustym zbiorem, K – ciałem oraz $F(X, K)$ – przestrzenią funkcji z W do K. Niech $x_0 \in X$. Wówczas odwzorowanie $\psi_{x_0} : F(X, K) \to K$ zadane wzorem:

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0)$$

  jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $F(X, K)$. Ten niezwykle istotny funkcjonał ψ_{x_0} nazywany **ewaluacją w punkcie** x_0.

Dlaczego poświęcamy szczególną notację dość prostym, wydawałoby się funkcjom liniowym? Powody są w istocie bardzo głębokie i rozciągają się na wiele działów matematyki, ale w tym miejscu ograniczymy się jedynie do jednej ważnej intuicji, którą wysłowimy bardziej precyzyjnie w drugim semestrze – mianowicie do słowa „dualność". Oto przykład dwóch dualnych zdań, wziętych z geometrii szkolnej:

- „Punkty A, B leżą na prostej c".
- „Proste a, b przecinają się w punkcie C".

Czytelnik z pewnością widzi pary dualnych obiektów i dualnych operacji. Nie śmiem wnikać w formalne szczegóły, ale przykład ten możemy odnieść do algebry liniowej formułując zdania:

- „Ciągi (a, b), (a', b') spełniają równanie liniowe C postaci $cx_1 + dx_2 = 0$".
- „Równania $ax_1 + bx_2 = 0, a'x_1 + b'x_2 = 0$ spełnione są jednocześnie przez punkt (c, d)".

Algebraicznie obydwa zdania napisane wyżej wyrażają się dokładnie tymi samymi formułami:

$$\begin{cases} ac + bd &= 0 \\ a'c + b'd &= 0. \end{cases}.$$

Wyróżnienie funkcjonałów pozwala na dostrzeżenie tej dualności. Rozważmy kolejne zdania.

- „Wektor $(s_1, \ldots, s_n)$ należy do jądra f danego wzorem $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$".
- „Wektor $(a_1, \ldots, a_n)$ należy do jądra g danego wzorem $g(x_1, \ldots, x_n) = s_1x_1 + \ldots + s_nx_n$".

Algebraicznie zdania te (choć mówią o różnych sytuacjach) wyrażają się tym samym warunkiem:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = 0.$$

Geometrycznie rzecz biorąc w równości powyżej rozpoznamy wkrótce prostopadłość wektorów $(s_1, \ldots, s_n)$, $(a_1, \ldots, a_n)$. W tym momencie dostajemy intuicję o swego rodzaju odpowiedniości pomiędzy funkcjonałami na przestrzeni V, a elementami V. Gdy $\dim V < \infty$, ma miejsce izomorfizm V i V^*.

Uwaga 2. *Jeśli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, to $V \simeq V^*$.*

Dowód. Niech $\dim V = n$. Wówczas $V^* = L(V, K)$ jest również wymiaru n, jako przestrzeń izomorficzna z $M_{1\times n}(K)$. Dwie przestrzenie tego samego, skończonego wymiaru, są izomorficzne. □

Zaproponuję w tym miejscu jeszcze jedno porównanie, tym razem zupełnie alegoryczne. Wydaje mi się, że może ono pomóc Czytelnikowi przyswoić sobie *intuicję* funkcjonału, przy czym nie będzie to ścisły wywód i najbliższe dwa akapity proszę traktować jedynie poglądowo.

Wyobraźmy sobie, że mamy piękną nieskończoną ścianę $V = \mathbb{R}^2$, którą chcemy pomalować. Mamy do dyspozycji kilka podstawowych kolorów np.: czerwony, zielony, niebieski. Pomalować można ją na różne kolory o różnej intensywności. Można na przykład wziąć kolor czerwony i pomalować na kompletnie typowy odcień czerwieni, cokolwiek to znaczy. Bierzemy w tym celu $c : V \to K$ i to będzie oznaczało, że naszą ścianę V malujemy na czerwono, ze „standardową intensywnością” (oczywiście trzeba pamiętać, ze funkcjonał przeprowadza zero w zero, więc alegoria ta ma pewne naturalne ograniczenia). Ktoś inny mógłby pomalować tę samą ścianę za pomocą funkcjonału $c'(v) = 0.2 \cdot c(v)$, czyli też na czerwono, ale w 5 razy mniej intensywnie niż w „standardzie”. Ktoś jeszcze inny mógłby malować według zasady $c''((x, y)) = (x+y) \cdot c(x)$ (przy założeniu, że ściana jest dwuwymiarowa). Ale może ktoś inny w ogóle nie chce malować na czerwono, ale woli użyć standardowego kolorowania niebieskiego $n : V \to K$?

A co jeśli ktoś zechce pomieszać kolory i np. użyć koloru $n + c : V \to K$, albo jeszcze lepiej $n + 2c$? Czy widzicie Państwo o co mi chodzi? Zupełnie na poziomie intuicji wyobrażam sobie wszystkie funkcjonały na V jako kolorowania i o dowolnym kolorowaniu $f \in V^*$ myślę, jako o funkcji, która jest kombinacją pewnych „podstawowych kolorowań” – bazowych. Co więcej, nie ma ustalonych „podstawowych kolorowań”. Każdy może ustalić sobie swoje podstawowe kolory (byle były to kolory niezależne od siebie i pozwalające dostać dowolny kolor) i mieszać je potem według uznania (i ktoś może mieć dwuwymiarową paletę kolorów z dwiema barwami podstawowymi, a ktoś inny – pięciowymiarową, albo nieskończenie wymiarową). Te nieco mętne intuicje mają dać posmak pojęcia „baz dualnych” przestrzeni V^*.

Uwaga 3. *Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V i niech $f_i : V \to K$ będzie jedynym funkcjonałem liniowym takim, że:*

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \textit{jeśli } i = j \\ 0, & \textit{jeśli } i \neq j. \end{cases} \qquad (\star)$$

Wówczas:

(a) $v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n$, *czyli* f_i *przyporządkowuje wektorowi jego* i*-tą współrzędną w bazie* $\mathcal{A}$*,*

(b) dla dowolnego $f \in V^*$ *mamy* $f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n$*, i jest to przedstawienie jednoznaczne,*

(c) układ funkcjonałów $\mathcal{A}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ *jest bazą* V^* *i wartość funkcjonału* $f \in V^*$ *na wektorze* v_j *jest* j*-tą współrzędną tego funkcjonału w bazie* $\mathcal{A}^*$*.*

Przykłady.

- Dla bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ postaci

  $$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0)$$

  układ funkcjonałów f_i określony warunkami wyżej istnieje i ma postać:

  $$f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_3, \quad f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_2 - x_3, \quad f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 - x_2.$$

  Na przykład dla $\alpha = (10, 5, 2)$ otrzymujemy:

  $$f_1(\alpha) = 2, f_2(\alpha) = 3, f_3(\alpha) = 5 \quad \text{oraz} \quad (10, 5, 2) = 2(1, 1, 1) + 3(1, 1, 0) + 5(1, 0, 0).$$

- **Przykład.** Współrzędne funkcjonału $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$, gdzie

  $$\phi((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 - 9x_2 + 5x_3$$

  w bazie sprzężonej do $\mathcal{A} = ((1, 1, 1), (5, 1, 1), (1, 1, 3))$ wynoszą:

  $$\phi((1, 1, 1)) = -2, \quad \phi((5, 1, 1) = 6, \quad \phi((1, 1, 3)) = 8.$$

Dowód. Pierwszy punkt jest oczywisty. Istotnie, jeśli $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, to obkładając tę równość z obydwu stron funkcjonałem f_i dostajemy: $f_i(v) = a_1f_i(v_1) + a_2f_i(v_2) + \ldots + a_2f_i(v_n)$. Tylko element $f_i(v_i)$ sumy po prawej jest niezerowy, z definicji f_i. A zatem $f_i(v) = a_i$.

Punkty (b) i (c) postulują, że $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V^*. Sprawdźmy najpierw, że układ ten jest liniowo niezależny. Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$a_1f_1 + \ldots + a_nf_n = 0,$$

przy czym 0 po prawej stronie intepretujemy jako funkcjonał zerowy! A zatem $a_1f_1 + \ldots + a_nf_n$ jest funkcjonałem, który dowolny wektor posyła na zero. Z drugiej strony biorąc element v_i bazy $\mathcal{A}$ mamy:

$$(a_1f_1 + \ldots + a_nf_n)(v_i) = a_1f_1(v_i) + \ldots + a_nf_n(v_i) = a_i.$$

A zatem $a_i = 0$, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$. A zatem $(f_1, \ldots, f_n)$ jest układem liniowo niezależnym.

Zobaczmy teraz, że $(f_1, \ldots, f_n)$ rozpina V^*. Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

Aby stwierdzić czy dwa przekształcenia są identyczne wystarczy to sprawdzić na dowolnej bazie V, na przykład na $(v_1, \ldots, v_n)$. Wówczas rzeczywiście:

$$(f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n)(v_i) = f(v_1)f_1(v_i) + \ldots + f(v_n)f_n(v_i) = f(v_i) \cdot 1.$$

□

Definicja 2. *Bazę $\mathcal{A}^*$ zdefiniowaną w uwadze wyżej wzorem $(\star)$ nazywamy bazą dualną do bazy $\mathcal{A}$.*

Przykład. Niech $\alpha_1 = (1, 3), \alpha_2 = (2, 7)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Weźmy $\alpha_1^*(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2$ oraz $\alpha_2^*(x_1, x_2) = -3x_1 + 1x_2$. Wówczas, jak we wzorze $(\star)$ mamy: $\alpha_1^*(\alpha_1) = 1$, $\alpha_1^*(\alpha_2) = 0$, $\alpha_2^*(\alpha_1) = 0$, $\alpha_2^*(\alpha_2) = 1$. Zauważmy, że jeśli wpiszemy współczynniki funkcjonałów w macierz (w kolumny), a wektory z wyjściowej bazy wpiszemy w wiersze macierzy, dostaniemy zależność:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Problem wyznaczania bazy dualnej jest problemem rozwiązania układu równań danego warunkami z $(\star)$. Macierze: mająca w wierszach wektory z $\mathcal{A}$ oraz: mająca w kolumnach wektory z $\mathcal{A}^*$ są **odwrotne**.

Bazą sprzężoną do bazy standardowej przestrzeni K^n jest baza złożona z funkcjonałów postaci

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i,$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Bazę tę oznaczać będziemy przez st^*.

Definicja 3. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.* ***Przekształceniem sprzężonym*** *do ϕ nazywamy przekształcenie $\phi^* : W^* \to V^*$ określone wzorem $\phi^*(g) = g \circ \phi$. Innymi słowy jest to takie przekształcenie, które bierze funkcjonał g z W^* i przeprowadza go na funkcjonał $\phi^*(g) : V \to K$ tak, że następujący diagram jest przemienny dla każdego $g \in W^*$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, dashed, "\phi^*(g)"] \arrow[dr, "\phi"'] & & K \\ & W \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Przykład przekształcenia sprzężonego. Rozważmy $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem:

$$\psi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 - 2x_3).$$

Wówczas dla funkcjonału $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanego wzorem:

$$f((y_1, y_2)) = 3y_1 - 2y_2$$

funkcjonał $\psi^*(f):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ jest zadany wzorem:

$$\begin{aligned}\psi^*(f)((x_1,x_2,x_3)) &= (f\circ\psi)((x_1,x_2,x_3)) = f(\psi((x_1,x_2,x_3)) = \\ &= f((2x_1+3x_2+x_3, 5x_1-x_2-2x_3)) = \\ &= 3(2x_1+3x_2+x_3)-2(5x_1-x_2-2x_3) = \\ &= -4x_1+11x_2+7x_3.\end{aligned}$$

A jak wygląda wzór przekształcenia ψ^*? Jak je zapisać? Można np.:

$$\psi^*(y_1\epsilon_1^*+y_2\epsilon_2^*) = a_1\epsilon_1^*+a_2\epsilon_2^*+a_3\epsilon_3^*$$

Zanim powiemy jak opisywać przekształcenie sprzężone wróćmy na moment do intuicji kolorowania. Wyobraźmy sobie, że malarz pracujący na ścianie V (możemy go z tą ścianą utożsamić) spogląda na ścianę W i ogląda to, co maluje tam ktoś inny. Malarz pracujący w V może kompletnie inaczej postrzegać kolory niż ten z W, i to jego postrzeganie nałożone na W określamy (zupełnie alegorycznie) jako $\phi:V\to W$. Jest to jakiś „klucz interpretacyjny” do rozumienia drugiego: może drugi malarz maluje naszym zdaniem monochromatycznie, a może my widzimy te same barwy, a on widzi różne? Jak o tym mówić? Jeśli mamy kolorowanie w W to malarz z tej ściany może opowiedzieć malarzowi z V co robi, a tamten spróbuje mu przekazać jak to zinterpretował według swojego „klucza” ϕ (mógłby użyć innego klucza $\psi:V\to W$ i dostalibyśmy inne interpretacje). A więc weźmiemy kolorowanie $f:W\to K$ i teraz malarz z V intepretuje je po swojemu (na swojej ścianie) jako $\phi^*(f)$. To mogą być oczywiście zupełnie różne postrzegania i inne kolorowania. Jak w przykładzie wyżej, malarz V może widzieć w 3 barwach tonalnych, a malarz w W tylko w dwóch. Mimo wszystko jakoś się dogadują, zgodnie z określonym kluczem. Oczwiście mogą zamienić się rolami. Domyślam się, że to mocno abstrakcyjna idea.

Definicja 4. ***Macierzą transponowaną*** *macierzy $A\in M_{m\times n}(K)$ nazywamy macierz $A^T\in M_{n\times m}(K)$, której kolejne kolumny są kolejnymi wierszami macierzy A.*

Uwaga 4. *Dla macierzy $A\in M_{m\times n}(K)$ mamy:*

$$(A^T)^T = A,\quad r(A)=r(A^T),\quad (AB)^T=B^TA^T,\quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,$$

jeśli A posiada macierz odwrotną.

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{A},\mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V oraz W. Niech $\phi:V\to W$. Wówczas:*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A}=(v_1,\ldots,v_n)$ jest bazą V oraz $\mathcal{B}=(w_1,\ldots,w_m)$ jest bazą W.

Dowód. Niech $(v_1^*,\ldots,v_n^*)$ będzie bazą dualną do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*,\ldots,w_m^*)$ będzie bazą dualną do $\mathcal{B}$. Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że i-ty wyraz j tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest i-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$. Z definicji bazy dualnej $\mathcal{B}^*$ wiadomo, że ta współrzędna wynosi $a_{ij}=w_i^*(\phi(v_j))$. Po transpozycji macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ wyraz a_{ij} staje się i-tym wyrazem j-tego wiersza macierzy transponowanej. Odpowiedni wyraz b_{ji} macierzy $M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ jest j-tą współrzędną i-tej kolumny tej macierzy, a więc to j-ta współrzędna wektora $\phi^*(w_i^*)$ w bazie $\mathcal{A}^*$. Ale $\phi^*(w_i^*)=w_i^*\circ\phi$. No to j-ta współrzędna tego funkcjonału w bazie $\mathcal{A}^*$ to $w_i^*(\phi(v_j))$, co należało pokazać. □

Wniosek 1. *Niech $\phi:V\to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

(a) ϕ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy ϕ^* jest epimorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy ϕ^* jest monomorfizmem.

Pokazujemy dowód dla przestrzeni skończonego wymiaru. Dla dowolnych przestrzeni rezultat ten wymaga pewnika wyboru. Dowód można znaleźć w skrypcie dr. Strojnowskiego.

Dowód. Wiemy już, że $r(\phi)=r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu przekształcenia mamy równoważności:

$$\phi \text{ jest monomorfizmem} \iff r(\phi)=\dim V \iff r(\phi^*)=\dim V^* \iff \phi^* \text{ jest epimorfizmem.}$$

oraz równoważności:

$$\phi \text{ jest epimorfizmem} \iff r(\phi)=\dim W \iff r(\phi^*)=\dim W^* \iff \phi^* \text{ jest monomorfizmem.}$$

□

Czym jest przestrzeń sprzężona do przestrzeni sprzężonej, czyli V^{**}? Jest to przestrzeń złożona z funkcjonałów $\Omega : V^* \to K$. A zatem każdemu funkcjonałowi z V^* przypisujemy element z K.

Definicja 5. *Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym.* ***Ewaluacją*** *funkcjonału ϕ w wektorze v jest przekształcenie $e_v(\phi) = \phi(v)$.*

Jest zupełnie jasne, że e_v jest przekształceniem liniowym, dla każdego $v \in V$. Co więcej, każda ewaluacja jest elementem V^{**}. A zatem każdemu wektorowi z V przypisaliśmy w naturalny sposób element V^{**}. Ma to ważne skutki w przypadku skończenie wymiarowym.

Twierdzenie 2. *Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Dowód. Oczywiście e jest przekształceniem liniowym. Skoro V oraz V^{**} są tego samego wymiaru wystarczy pokazać, że e jest monomorfizmem. Załóżmy, że $v \in \ker(e)$. Wówczas e_v jest elementem zerowym w V^{**}, czyli dla każdego $\phi : V \to K$ mamy $e_v(\phi) = 0$. Z definicji e oznacza to, że $\phi(v) = 0$, dla każdego $\phi \in V^*$. A zatem wektor v ma tę własność, że ewaluowany na każdym funkcjonale liniowym jest zerem. Jedyny element z V o tej własności to 0, a więc $\ker(e) = \{0\}$. □

W przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru mamy oczywiście $V \not\simeq V^{**}$.

Wykład zakończymy pewną ogólną uwagą. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Wiemy, że przestrzenie $V \simeq V^*$, a więc istnieje między nimi izomorfizm. Żaden izomorfizm nie jest jednak wyróżniony lub „naturalny”. Dlaczego, i co to znaczy? Na razie ograniczymy się do intuicji. Możemy wprawdzie wybrać bazę w V oraz bazę w V^* i zażądać przekształcenia liniowego $i : V \to V^*$, które przeprowadza jedną bazę w druga. Jest jednak pewien problem. Załóżmy, ze mamy dwie skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe V_1 oraz V_2 oraz przekształcenie liniowe $\lambda : V_1 \to V_2$. Wiemy, że indukuje ono przekształcenie liniowe $\lambda^* : V_2^* \to V_1^*$. Chciałoby się uważać, że skoro V i V^* są izomorficzne, to istnieje jakiś naturalny sposób przechodzenia z elementów $L(V, V)$ do elementów $L(V^*, V^*)$. Okazuje się, że nie musi istnieć izomorfizm $i : V \to V^*$ taki, że dla każdego izomorfizmu λ spełniona jest równość:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V^* \\ \lambda\big\downarrow & & \big\uparrow\lambda^* \\ V & \xrightarrow[i]{} & V^* \end{array}$$

Ewaluacja $e_v : V \not\simeq V^{**}$ określona wyżej spełnia ten warunek, tzn. dla dowolnego izomorfizmu $\lambda : V \to V$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{e_v} & V^{**} \\ \lambda\big\downarrow & & \big\uparrow\lambda^{**} \\ V & \xrightarrow[e_v]{} & V^{**} \end{array}$$

Gdy poznamy język teorii kategorii zrozumiemy trochę lepiej na czym polegają obserwacje wprowadzone wyżej. W tym momencie zgromadziliśmy niemal wszystkie pojęcia niezbędne do rozpoczęcia badania geometrycznych własności przekształceń liniowych. Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze jednej konstrukcji związanej z przestrzenią sprzężoną, która da nam intuicję związaną z twierdzeniem Kroneckera-Capellego.

Definicja 6. *Niech U będzie podprzestrzenią V.* ***Anihilatorem podprzestrzeni*** *U w V^*, oznaczamy przez $Ann(U)$ nazwiemy zbiór wszystkich funkcjonałów na V, które znikają na U, czyli:*

$$Ann(U) = \{f \in V^* \mid f(u) = 0, \text{ dla każdego } u \in U\}.$$

Nietrudno widzieć, że $Ann(U)$ to podprzestrzeń liniowa.

Na mocy twierdzenia o izomorfizmie V oraz V^{**} możemy traktować elementy V^{**} po prostu jako wektory z V. To oznacza, że jeśli weźmiemy podprzestrzeń X przestrzeni V^*, to możemy zdefiniować $Ann(X)$ jako zbiór tych wektorów $\alpha \in V$, dla których $\phi(\alpha) = 0$, dla każdego $\phi \in X$. Czy nie brzmi to znajomo? Otóż tak jest, znaleźliśmy inne wysłowienie twierdzenia Kroneckera-Capellego.

Twierdzenie 3. *Jeśli V jest n-wymiarową przestrzenią liniową, to przyporządkowana*

$$U \mapsto Ann(U), \text{ dla } U \subseteq V \qquad \text{oraz } X \mapsto Ann(X), \text{ dla } X \subseteq V^*$$

zadają bijekcję między k wymiarowymi podprzestr. V i $(n-k)$ wymiarowymi podprzestrz. V^*. Jeśli $W \subseteq V$ jest podprzestrz. opisaną układem równań $\{\beta_i^* = 0 \mid i = 1, \ldots, n-k\}$, to $D(W) = \mathrm{lin}(\beta_i, i = 1, \ldots, n-k\}$.

Uzupełnienie. Sprzężenie przestrzeni nieskończenie wymiarowej

Przykład. Pokażemy, że $K[x]^* \simeq K[[x]]$, gdzie $K[[x]]$ jest zbiorem nieskończonych sum formalnych postaci: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, gdzie $a_i \in K$. Przestrzeń $K[[x]]$ nazywamy **szeregami formalnymi** nad ciałem K.

Dowód. Niech $\phi : K[x]^* \to K[[x]]$ będzie określone wzorem:

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) x^i.$$

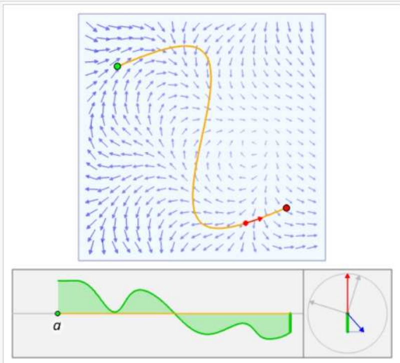
A więc współczynnikiem przy x^i w szeregu $\phi(f)$ jest wartość funkcjonału f na x^i. Oczywiście $\phi(af+bg) = a\phi(f)+b\phi(g)$, dla dowolnych $f, g \in K[x]^*$ oraz $a, b \in K$. Jest to więc przekształcenie liniowe. Nietrudno też widzieć, że ϕ ma trywialne jądro. Tylko przekształcenie zerowe ma tę własność, że $f(x^i) = 0$, dla każdego i. Co więcej, ψ jest surjekcją, bo dla $w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]]$ bierzemy $f \in K[x]^*$ taki, że $f(x^i) = a_i$ (określamy funkcjonał na bazie $K[x]$, więc taki f istnieje). Oczywiście $w = \phi(f)$, wiec ψ jest izomorfizmem. $\square$

Nie mamy do dyspozycji teorii liczb kardynalnych, ale w jej języku zachodzą równości: $\dim K[x] = \omega$, zaś $\dim K[[x]] \geqslant 2^{\omega}$, zależnie od mocy ciała K. A zatem $K[x] \not\simeq K[x]^*$. Dowodzi się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Jeżeli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K i $\dim(V) = \infty$, to $\dim V^* = |K|^{\dim V}$.*

Dowód można przeczytać w skrypcie dr. Strojnowskiego:
https://www.mimuw.edu.pl/~stroa/Gal_Dodatki/Sprzezone.pdf.

Trudno być może dostrzec od razu motywacje geometryczne jakie stoją za pojęciem przestrzeni sprzężonej. Takie motywacje dostaniecie Państwo na analizie matematycznej, ale nie tylko... Nawet odnosząc się do fizyki (szkolnej?) wiemy, że siła reprezentowana jest najczęściej przez wektor F. Zwykle interesuje nas pytanie: co „robi” siła gdy przesuwa się obiekt z punktu A do punktu B. Jeśli q jest pozycją obiektu w przestrzeni, to F działa na q dając liczbę zwaną pracą... A więc o pracy można myśleć jak o funkcjonale... Można by tu dużo mówić, ale na razie powiedzmy tylko, że przestrzenie sprzężone są ważne.



The trajectory of a particle (in red) along a curve inside a vector field. Starting from a, the particle traces the path C along the vector field F. The dot product (green line) of its tangent vector (red arrow) and the field vector (blue arrow) defines an area under a curve, which is equivalent to the path's line integral. (Click on image for a detailed description.)

Rysunek 1. Na razie Państwo nie musicie rozumieć tego obrazka, ale możecie go już oglądać. Źródło: Wikipedia.