Izomorfizmy i macierze odwracalne

Ostatnia aktualizacja: 13.12.2021 r.

Od dwóch wykładów mówimy o przekształceniach liniowych, czyli funkcjach pomiędzy przestrzeniami liniowymi (nad ustalonym ciałem) zachowującymi kombinacje liniowe. Jeśli przekształcenie takie jest bijekcją, wówczas mówimy, że jest ono izomorfizmem, a przestrzenie, między którymi działa są przestrzeniami izomorficznymi. Z punktu widzenia algebry liniowej są to przestrzenie o identycznej strukturze. Pokazaliśmy, że w przypadku przestrzeni skończonego wymiaru niezmiennikiem odróżniającym przestrzenie, z dokładnością do izomorfizmu, jest właśnie wymiar przestrzeni liniowej.

Na poprzednim wykładzie przyglądaliśmy się strukturze przestrzeni liniowej $L(V, W)$ złożonej z przekształceń liniowych z przestrzeni V do przestrzeni W (nad ustalonym ciałem K). W przypadku przestrzeni skończonego wymiaru wskazaliśmy izomorfizm pomiędzy $L(V, W)$ oraz przestrzenią $M_{\dim W\times\dim V}(K)$. Polega on na wyborze baz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ odpowiednio przestrzeni V, W oraz przypisaniu przekształceniu liniowemu ϕ macierzy tego przekształcenia w tych bazach, czyli macierzy $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$. W kolejnych kolumnach tej macierzy znajdują się kolejne współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ obrazów kolejnych wektorów z bazy $\mathcal{A}$. Podkreślamy słowo – kolejnych, ponieważ w rozważanym podejściu kolejność wektorów w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ma znaczenie.

Na ostatnim wykładzie powiedzieliśmy o składaniu przekształceń liniowych i odpowiadającej mu operacji mnożenia macierzy. Sugerowaliśmy, że badanie macierzy przekształcenia w różnych bazach umożliwia lepsze zrozumienie jego geometrycznej natury. Również (i nie tylko) kluczowe własności algebraiczne – bycie izomorfizmem, monomorfizmem czy epimorfizmem odczytać można w języku mnożenia macierzy i w języku złożeń. Podstawowej intuicji dostarczają tu izomorfizmy. Teoria funkcji podpowiada bowiem, że dla każdej bijekcji istnieje odwrotna bijekcja, a więc taka, że złożenie bijekcji z odwrotną do niej jest identycznością. Okazuje się, że dla bijekcji-izomorfizmów, bijekcja odwrotna jest również izomorfizmem.

Twierdzenie 1. *Niech $\phi \in L(V, W)$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie $\psi \in L(W, V)$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \quad \textit{oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W . \qquad (*)$$

Dowód. Niech ϕ będzie izomorfizmem. Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$. Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$. A zatem $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$. Analogicznie sprawdzamy $\psi(c\beta) = c\psi(\beta)$, dla każdych $\beta \in W$, $c \in K$. Zatem ψ jest liniowe i $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$. Stąd (1) $\Rightarrow$ (2).

Przechodzimy do implikacji (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. Wówczas

$$\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\beta) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta.$$

Zatem ϕ jest różnowartościowe. Mamy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, a więc dla każdego $\gamma \in W$ mamy

$$\gamma = \mathrm{id}_W(\gamma) = (\phi \circ \psi)(\gamma) = \phi(\psi(\gamma)).$$

A więc $\gamma = \phi(\psi(\gamma))$, czyli ϕ jest „na". □

Powyższy dowód pokazuje, że może być tylko jedno ψ spełniające warunek $(*)$. Co więcej, ψ to izomorfizm.

Definicja 1. *Jeśli dla przekształcenia $\phi \in L(V, W)$ istnieje przekształcenie $\psi \in L(W, V)$ spełniające $(*)$, to ψ nazywamy **przekształceniem odwrotnym** do ϕ i oznaczamy przez ϕ^{-1}.*

Jak widzimy ϕ^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest izomorfizmem. W języku złożeń wysłowić można także własności monomorfizmów i epimorfizmów. Dowody tych własności wynikają bezpośrednio z dowodu wyżej (a osobno zapisane są też w skrypcie w postaci Wniosku 4.15 na str. 57).

Wniosek 1. *Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas*

- *ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\psi \in L(W, V)$, że $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$.*
- *ψ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\psi \in L(W, V)$, że $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.*

Odczytajmy powyższe rezultaty w języku macierzy przekształceń liniowych. Przypomnijmy kluczowy rezultat wiążący składanie przekształceń i mnożenie macierzy.

Twierdzenie 2. *Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to: $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.*

Załóżmy teraz, że ϕ jest izomorfizmem przestrzeni wymiaru n. Aby istniało przekształcenie ψ, które złożone z nim daje identyczność na przestrzeni V, zachodzić musi:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ otrzymujemy:

$$I_n = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Obydwie powyższe obserwacje prowadzą do ważnych wniosków i nowych definicji.

Definicja 2. *Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli*

$$AB = BA = I_n.$$

*Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy, o ile istnieje, jako A^{-1}. Macierz, która ma odwrotną nazywamy **macierzą odwracalną**.*

Uwaga 1. Dla każdej przestrzeni liniowej V wymiaru n oraz jej baz $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ mamy

$$M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Y}} = I_n = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}.$$

Uwaga 2. Jeśli $A_1, \ldots, A_k \in M_{n\times n}(K)$ są odwracalne, to również $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna, bo:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = I_n.$$

Twierdzenie 3. *Niech $\phi \in L(K^n, K^n)$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) ϕ jest izomorfizmem,

(ii) macierz $M(\phi)_{st}^{st}$ jest odwracalna,

(iii) dla dow. baz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest odwracalna.

Dowód. Jeśli ϕ jest izomorfizmem oraz $\psi = \phi^{-1}$, to biorąc $M(\psi)_{st}^{st}$ mamy:

$$M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi \circ \phi^{-1})_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{st}^{st} = I_n.$$

Analogicznie $M(\psi)_{st}^{st} \cdot M(\phi)_{st}^{st} = I_n$, co daje (i) $\Rightarrow$ (ii). Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ jest odwracalna i $AB = I_n$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$. Wówczas

$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I_n = M(id)_{st}^{st}.$$

Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I_n$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Zatem ϕ to izomorfizm i mamy (ii) $\Rightarrow$ (i). Równoważność (i) oraz (ii) implikuje, że macierz odwrotna jest jednoznacznie wyznaczona, jeśli istnieje. Implikacja (iii) $\Rightarrow$ (ii) jest oczywista. Implikacja odwrotna wynika z rozkładu $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$. Macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest więc odwracalna, jako iloczyn macierzy odwracalnych. A zatem (ii) $\Rightarrow$ (iii) i dowód jest zakończony. □

Wniosek 2. *Jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ spełniają warunek $AB = I_n$, to $B = A^{-1}$.*

W ostatnim wniosku kluczowe jest założenie, że A, B są rozmiaru $n \times n$. Oczywiście mamy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$, ale żaden z czynników nie jest macierzą odwracalną.

Znając związek pomiędzy izomorfizmami a macierzami odwracalnymi przechodzimy do dwóch zagadnień.

1. Opis wszystkich macierzy izomorfizmów przestrzeni n-wymiarowej.

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej do danej (o ile to możliwe).

Definicja 3. *Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V. Macierz $M(\mathrm{id}_V)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ nazywamy **macierzą zamiany (transformacji) współrzędnych** z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.*

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) A jest macierzą zamiany współrzędnych w K^n,

(ii) A jest macierzą odwracalną,

(iii) przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)^{st}_{st} = A$ jest izomorfizmem,

(iv) $r(A) = n$.

Dowód. Równoważność warunków (ii) oraz (iii) pokazaliśmy wyżej. Mamy $r(A) = \dim \operatorname{im} \phi = n$, więc w sposób oczywisty (iii) jest równoważne (iv) (na mocy równości $n = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$). Również implikacja (i) $\Rightarrow$ (iii) została uzasadniona wyżej. Pozostaje więc wykazać (iii) $\Rightarrow$ (i). To jest jednak jasne, bowiem jeśli przez $\mathcal{A}$ oznaczymy zbiór kolumn macierzy A, to $\mathcal{A}$ jest bazą K^n (izomorfizm przeprowadza bazę na bazę). Oznacza to, że $A = M(\mathrm{id})^{st}_{\mathcal{A}}$, co kończy dowód. □

Wyznaczanie macierzy odwrotnej do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ można przeprowadzić, startując od macierzy, której pierwsze n kolumn to kolejne kolumny macierzy A, a kolejne n kolumn to kolejne kolumny macierzy I_n. Jeśli za pomocą elementarnych operacji wierszowych sprowadzimy taką macierz do postaci, w której pierwsze n kolumn to kolejne kolumny macierzy I_n, to n kolejnych kolumn powstałej macierzy to kolejne kolumny macierzy A^{-1}. Schematycznie algorytm przedstawia się następująco:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right].$$

Uzasadnienie: rozważmy równanie $AX = I_n$, gdzie $A \in M_{n\times n}(K)$ jest dana natomiast $X \in M_{n\times n}(K)$ – szukana. Wówczas i-ta kolumna macierzy X jest rozwiązaniem układu równań o macierzy rozszerzonej

$$[A \,|\, \epsilon_i],$$

gdzie ϵ_i to i-ty wektor bazy standardowej K^n. Innymi słowy algorytm opisany wyżej jest w istocie algorytmem jednoczesnego rozwiązania n układów równań takich, jak wyżej.

Przykład. Wyznaczmy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mamy

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right].$$

Rzeczywiście więc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Skoro mówimy już o operacjach elementarnych to czas uzyskać świadomość, że wykonywanie operacji elementarnych również wiąże się z mnożeniem macierzy. Pomoże to nam uzyskać drugie kryterium odwracalności (a także kolejny efektywny algorytm odwracania) macierzy. Rozważmy pewne przykłady.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ xd & xe & xf \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & xb & c \\ d & xe & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że **przemnażanie z lewej strony** macierzy o wyrazach a, b, c, d, e, f przez pewne macierze dokonuje na niej odpowiedniej operacji elementarnej na wierszach. Podobnie można, przez **przemnażanie z prawej strony**, uzyskać analogiczne operacje na kolumnach (za pomocą tych samych macierzy). Powyższe obserwacje prowadzą do następującej definicji.

Definicja 4. *Niech n, i, j będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ i niech a, c będą elementami ciała K, przy czym $c \neq 0$. Definiujemy następujące macierze $E_{ij}^n(a), T_{ij}^n, I_i^n(c)$ należące do $M_{n\times n}(K)$:*

- $E_{ij}^n(a) = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, *gdzie*

$$a_{st} = \begin{cases} a, & \text{gdy } s = i, t = j \\ 1, & \text{gdy } s = t \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

- $T_{ij}^n = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, *gdzie*

$$a_{st} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } s = t \neq i, j \\ 1, & \text{gdy } s = i, t = j \text{ lub } s = j, t = i \; . \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

- $I_i^n(c) = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, *gdzie*

$$a_{st} = \begin{cases} c, & \text{gdy } s = t = i \\ 1, & \text{gdy } s = t \neq i \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} ,$$

Macierze $E_{ij}^n(a), T_{ij}^n, I_i^n(c)$ nazywamy ***macierzami operacji elementarnych****.*

Przykłady:

$$E_{24}^5(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{35}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_1^5(c) = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zachodzi następujący fakt, który jest łatwym ćwiczeniem.

Uwaga 1. *Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:*

- $E_{ij}^m(x) \cdot A$ *– macierz powstała z A przez dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza pomnożonego przez x,*
- $A \cdot E_{ij}^n(x)$ *– macierz powstała z A przez dodanie do j-tej kolumny i-tej kolumny pomnożonej przez x,*
- $T_{ij}^m \cdot A$ *– macierz powstała z A przez przestawienie i-tego i j-tego wiersza,*
- $A \cdot T_{ij}^n$ *– macierz powstała z A przez przestawienie i-tej i j-tej kolumny,*
- $I_i^m(y) \cdot A$ *– macierz powstała z A przez pomnożenie i-tego wiersza przez y,*
- $A \cdot I_i^n(y)$ *– macierz powstała z A przez pomnożenie i-tej kolumny przez y.*

Wniosek 3. *Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje*

- *macierz $P \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, T_{ij}^m, że PA jest schodkowa,*
- *macierz $Q \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x), T_{ij}, I_i(y)$, że QA jest schodkowa zredukowana.*

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi – wynika on natychmiast z tego, że każdą macierz można sprowadzić do postaci schodkowej i schodkowej zredukowanej operacjami odpowiedniego typu.

Przykład: postacią zredukowaną macierzy $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest macierz jednostkowa I_3, dokładniej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = I_3.$$

Zauważmy, że wyznaczyliśmy w istocie macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A. Jest to iloczyn macierzy operacji elementarnych przeprowadzających macierzy A w swoją postać zredukowaną I_3. Wyjaśnienie wynika z następującej uwagi, formalizującej znaną nam intuicję – działanie operacji elementarnej można „odwrócić” za pomocą operacji tego samego typu.

Uwaga 2. *Dla każdej macierzy $S \in M_{n\times n}(K)$ jednego z typów $E^n_{ij}(a), T^n_{ij}, I^n_i(c)$ istnieje macierz S' tego samego typu taka, że:*

$$S'S = SS' = I.$$

Dowód. Istotnie, łatwo sprawdzić, że

- jeśli $S = E^n_{ij}(a)$, to $S' = E^n_{ij}(-a)$,
- jeśli $S = T_{ij}$, to $S' = T_{ij}$,
- jeśli $S = I^n_i(c)$, to $S' = I^n_i(c^{-1})$

□

Zachęcam Czytelnika, by zapoznawszy się z tymi uwagami uzasadnił następujące wnioski.

Wniosek 4. *Niech $A' \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą otrzymaną z A przez sprowadzenie do zredukowanej postaci schodkowej za pomocą elementarnych operacji na wierszach. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *macierz A jest odwracalna*
- *$A' = I$.*

W szczególności następujące warunki są równoważne:

- *macierz A jest odwracalna,*
- *A jest iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, T_{ij}, $I_i(y)$, gdzie $y \neq 0$.*

Wskazówka. Niech $A' = W_r \cdot \ldots \cdot W_1 \cdot A$, gdzie W_i – macierze operacji elementarnych. Wyznacz A.

Wniosek 5. *Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$ są macierzami schodkowymi zredukowanymi i B jest otrzymana z A elementarnymi operacjami na wierszach, to $A = B$. W szczególności dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje dokładnie jedna macierz schodkowa zredukowana otrzymana z A operacjami elementarnymi na wierszach.*

Niezwykle ważnym wnioskiem z powyższych faktów jest obserwacja bazująca na tym, że rząd macierzy nie zmienia się przy wykonywaniu operacji elementarnych na wierszach lub kolumnach.

Wniosek 6. *Jeśli $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{m\times m}(K)$ oraz $C \in M_{n\times n}(K)$, przy czym $r(B) = m$ i $r(C) = n$, to:*

$$r(BAC) = r(A).$$

Dowód. Istotnie, skoro B ma rząd m, a C ma rząd n, to znaczy, że są to macierze odwracalne. Każdą z nich można zatem przedstawić jako iloczyn macierzy operacji elementarnych. W ten sposób iloczyn BAC powstaje przez wykonanie pewnego ciągu wierszowych i kolumnowych operacji elementarnych na macierzy A. □

Uzyskaliśmy wygodny opis przekształceń liniowych w języku macierzowym. Na kolejnym wykładzie zagłębimy się bardziej szczegółowo w strukturę przestrzeni przekształceń $L(K^n, K)$ i wychodząc z intuicji zdobytych przy twierdzeniu Kroneckera-Capellego pokażemy, że struktura tej przestrzeni jest swego rodzaju negatywem struktury przestrzeni K^n. Mówiąc dokładniej, wprawdzie $L(K^n, K) \simeq K^n$, to jednak izomorfizm tych przestrzeni nie przenosi ich struktur w sposób naturalny (chociażby dlatego, że podprzestrzenie „małego” wymiaru przechodzą na podprzestrzenie „dużego” wymiaru). Tego rodzaju „naturalny” izomorfizm ma – o dziwo – miejsce pomiędzy $L(L(K^n, K), K)$, a K^n. Wyniki te mają ważne skutki w całej matematyce, ale przede wszystkim – dają bardzo cenny punkt widzenia na rolę „przekształceń”, zwłaszcza w analizie wielowymiarowej, gdzie jednym z centralnych tematów są tzw. formy różniczkowe.