Macierz przekształcenia liniowego. Mnożenie macierzy

Ostatnia aktualizacja: 14.12.2021 r.

Na poprzednim wykładzie zobaczyliśmy uogólnienia pojęć: zbioru rozwiązań jednorodnego układu równań i przestrzeni kolumnowej macierzy na pojęcia: jądra i obrazu przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$. W przypadku, gdy V jest przestrzenią skończonego wymiaru pozwoliło nam to na uzyskanie kluczowego uogólnienia twierdzenia Kroneckera-Capellego, w postaci formuły:

$$\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi.$$

Wprowadziliśmy pojęcia monomorfizmu, epimorfizmu i izomorfizmu, będące odpowiednikami iniekcji, suriekcji i bijekcji w klasie przekształceń liniowych. Pozwoliło to na określenie pojęcia przestrzeni izomorficznych – a więc przestrzeni, które będziemy traktowali jako „identyczne co do struktury”. Dzięki charakteryzacji izomorfizmów jako jedynych przekształceń liniowych, które przeprowadzają bazy w bazy, dowiedliśmy, że dla przestrzeni skończonego wymiaru izomorfizm dwóch przestrzeni jest równoważny temu, że przestrzenie te mają równe wymiary. Stąd nasze dalsze rozważania dotyczące przestrzeni liniowych skończonego wymiaru prowadzić będziemy głównie na przestrzeniach współrzędnych.

W ramach dzisiejszego wykładu zobaczymy, że w kontekście przekształceń liniowych niezwykle istotną rolę odgrywa przestrzeń macierzy oraz operacja mnożenia macierzy, którą wprowadzimy w kontekście składania przekształceń liniowych. Zacznijmy od pewnych ogólnych obserwacji pokazujących, że zbiór wszystkich przekształceń liniowych pomiędzy ustalonymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K ma strukturę przestrzeni liniowej. Pierwsza uwaga jest oczywista.

Uwaga 1. *Jeśli $\phi, \psi : V \to W$ są przekształceniami liniowymi przestrzeni liniowych nad ciałem K oraz jeśli $a \in K$, to funkcje $\phi + \psi$ oraz $a\phi$ traktowane jako elementy $F(V, W)$ są przekształceniami liniowymi.*

Zbiór wszystkich przekształceń K-liniowych z V do W jest zatem podprzestrzenią przestrzeni $F(V, W)$ i będziemy ją oznaczać symbolem[1] $L(V, W)$. Zerem tej przestrzeni liniowej jest przekształcenie zerowe.

Twierdzenie 1. *Ma miejsce izomorfizm przestrzeni liniowych:*

$$L(K^n, K^m) \simeq M_{m\times n}(K),$$

Dowód. Z poprzedniego wykładu wiemy, że dla każdego $\phi \in L(K^n, K^m)$ istnieje jednoznacznie wyznaczona macierz $M(\phi) = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ taka, że obraz wektora $(x_1, \ldots, x_n)$ po wzięciu tego przekształcenia liniowego ma postać:

$$K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in K^m$$

Innymi słowy, obraz i-tego wektora z bazy standardowej ϵ_i przy ϕ jest i-tą kolumną macierzy $M(\phi)$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Twierdzimy, że przyporządkowanie: $M : L(K^n, K^m) \to M_{m\times n}(K)$ zadane wzorem:

$$\phi \xrightarrow{M} M(\phi)$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. Rzeczywiście, M jest różnowartościowe, bo każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie określone na bazie (a kolumny $M(\phi)$ to obrazy wektorów z bazy standardowej). Oczywiście jest to również suriekcja: dla każdej macierzy $X \in M_{m\times n}(K)$ można określić $\phi : K^n \to K^m$, które przeprowadza i-wektor standardowy K^n w i-tą kolumnę macierzy X, co pokazywaliśmy ostatnio.

Pozostaje pokazać, że M jest przekształceniem liniowym, ale to jest w zasadzie oczywiste. Dla dowolnych $\phi, \psi : K^n \to K^m$ macierz $M(\phi + \psi)$ ma w i-tej kolumnie wektor $(\phi + \psi)(\epsilon_i)$, a zatem jest sumą i-tych kolumn macierzy $M(\phi)$ oraz $M(\psi)$. Jest też jasne, że dla każdego $\lambda \in K$ oraz $\phi \in L(K^n, K^m)$ mamy $M(\lambda\phi) = \lambda \cdot M(\phi)$. A zatem M jest liniową bijekcją, czyli izomorfizmem przestrzeni liniowych.

□

[1] Często stosuje się także ogólniejszą notację: $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Czy M jest jedynym izomorfizmem pomiędzy $L(K^n, K^m)$ oraz $M_{m\times n}(K)$? Okazuje się, że jest ich więcej. W przykładach wyżej macierz $M(\phi)$ powstała w istocie stąd, że braliśmy wektory bazy standardowej w K^n i za i-tą kolumnę macierzy $M(\phi)$ braliśmy wektor o współrzędnych wektora $\phi(\epsilon_i)$ w bazie standardowej. Tę konstrukcję można uogólnić do fundamentalnej dla całego wykładu definicji. Jaki jest pomysł?

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned}\phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \quad + x_3(-1,1).\end{aligned}$$

Inaczej pisząc:

$$\begin{aligned}\phi((1,0,0)) = (2,1) \quad &= \quad 2\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1),\\ \phi((0,1,0)) = (1,-1) &= \quad 1\cdot(1,0) - 1\cdot(0,1),\\ \phi((0,0,1)) = (-1,1) &= -1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)\end{aligned}$$

Współczynniki oznaczone kolejnymi kolorami wyznaczają kolumny macierzy, którą wyżej nazwaliśmy $M(\phi)$. W definicji, którą za chwilę wprowadzimy, macierz ta będzie miała nowe oznaczenie: $M(\phi)_{st}^{st}$, co oznacza, że w jej kolumnach stoją wektory zawierające współrzędne obrazów wektorów z bazy standardowej w $\mathbb{R}^3$, a te współrzędne są w bazie standardowej $\mathbb{R}^2$.

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

Rozważmy teraz inne bazy odpowiednio przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{A} = (\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,2), \alpha_3 = (2,1,0))$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
- $\mathcal{B} = (\beta_1 = (0,1), \beta_2 = (2,0))$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_1) = (1,2) \quad &= 2\cdot\beta_1 + \frac{1}{2}\cdot\beta_2,\\ \phi(\alpha_2) = (-1,1) &= 1\cdot\beta_1 - \frac{1}{2}\cdot\beta_2,\\ \phi(\alpha_3) = (5,1) \quad &= 1\cdot\beta_1 + \frac{5}{2}\cdot\beta_2\end{aligned}$$

Możemy zatem przypisać przekształceniu ϕ macierz, która w kolumnach będzie miała współrzędne obrazów kolejnych wektorów z bazy $\mathcal{A}$, ale współrzędne te będą w bazie $\mathcal{B}$. Macierz tą oznaczać będziemy jako: $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, tzn.

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Definicja 1. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech*

- *$\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie (uporządkowaną) bazą przestrzeni V,*
- *$\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ będzie (uporządkowaną) bazą przestrzeni W.*

Macierzą przekształcenia *ϕ w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywamy taką macierz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdego $1 \leqslant j \leqslant n$:*

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i,$$

Taką macierz A oznaczamy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Innymi słowy:

w j-tej kolumnie macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ stoją współrzędne wektora $\phi(\alpha_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Za chwilę pojawi się więcej przykładów, ale aż by się chciało zapytać: po co nam takie macierze przekształceń liniowych? Dobrą motywacją może być następujący przykład. Załóżmy, że mamy bazę

$$\mathcal{A} = ((1,0,1),(2,0,-1),(5,1,3))$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i rozważmy przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o następującej macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z definicją, w pierwszej kolumnie są współrzędne wektora $\phi((1,0,1))$ w bazie $\mathcal{A}$, w drugiej kolumnie są współrzędne wektora $\phi((2,0,-1))$ w bazie $\mathcal{A}$, zaś w trzeciej kolumnie są współrzędne wektora $(5,1,3)$ w bazie $\mathcal{A}$, czyli:

$$\begin{aligned} \phi((1,0,1)) &= 1\cdot(1,0,1) + 0\cdot(2,0,-1) + 0\cdot(5,1,3) \\ \phi((2,0,-1)) &= 0\cdot(1,0,1) - 1\cdot(2,0,-1) + 0\cdot(5,1,3) \\ \phi((5,1,3)) &= 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(2,0,-1) - 1\cdot(5,1,3) \end{aligned}$$

Czy Czytelnik widzi, że z tej konkretnej postaci macierzy możemy odczytać informację, że ϕ jest w istocie symetrią względem $\mathrm{lin}((1,0,1))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(((2,0,-1),(5,1,3))$? Tak właśnie jest! Proszę spróbować znaleźć wzór tego przekształcenia. Idea jest następująca: są takie bazy, w których od razu „widać" co przekształcenie liniowe robi. I jeśli w pewnych bazach zobaczymy taką właśnie, a nie inną postać przekształcenia, to nam będzie mówiło coś o jego geometrii. O tym jednak porozmawiamy w drugim semestrze.

- Niech $\mathrm{id} : K^n \to K^n$ będzie identycznością, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ niech będzie bazą K^n. Wówczas:

  $$M(\mathrm{id})_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

  Macierz tę nazywać będziemy **macierzą identycznościową** (rozmiaru n), ozn. I (lub I_n, gdy chcemy podkreślić jej rozmiar). Zauważmy jednak, że w innych niż standardowe bazach, macierze przekształcenia id nie muszą być wcale identycznościowe. Np.:

  $$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix},$$

  gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ są kolejnymi wektorami bazy $\mathcal{A}$ zapisanymi w postaci kolumnowej.

  Przy tej okazji warto zaznaczyć, że w rozważanej definicji macierzy przekształcenia liniowego w bazach istotna jest kolejność wektorów bazowych. Na przykład jeśli przyjąć $st' = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$, to mamy[2]:

  $$M(\mathrm{id})_{st'}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Niech $\phi_a : K^n \to K^n$ będzie jednokładnością o skali a. W bazach standardowych macierz ϕ_a to:

  $$M(\phi_a)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

  Weźmy jednak bazę $\mathcal{B} = (a\epsilon_1,\ldots,a\epsilon_n)$ przestrzeni K^n, gdzie $st = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$. Wówczas mamy:

  $$M(\phi_a)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

[2] Macierze, które powstają przez permutację kolumn macierzy I nazywamy *permutacyjnymi*. To niezwykle ważne obiekty.

Przykład ten w połączeniu z poprzednim pokazuje, że ta sama macierz może być macierzą różnych przekształceń w odpowiednich bazach. Nie każda macierz rozmiaru $m \times n$ jest macierzą każdego przekształcenia liniowego w pewnych bazach (jak się okazuje potrzeba i wystarczy, by zgadzały się rząd macierzy i rząd przekształcenia). Pokażemy jednak, że dobierając bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ i biorąc dowolną macierz A odpowiednich rozmiarów da się znaleźć przekształcenie liniowe ϕ takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$.

- Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie **rzutem** na podprzestrzeń W wzdłuż U. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

  – $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla pewnego $1 < k < n$) jest bazą przestrzeni W,

  – $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U.

  Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów bazy standardowej K^n, zaś dalej kolumny zerowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

- Niech $V = W \oplus U$ i niech ϕ będzie **symetrią** względem W wzdłuż U. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

  – $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla pewnego $1 < k < n$) jest bazą przestrzeni W,

  – $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U.

  Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów, zaś dalej $n-k$ wektorów przeciwnych do wektorów z bazy standardowej K^n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix},$$

- Niech $\phi : K[x]_{\leqslant n} \to K[x]_{\leqslant n}$ będzie przekształceniem liniowym polegającym na braniu pochodnej wielomianu stopnia co najwyżej n. Niech $\mathcal{X} = (1, x, \ldots, x^n)$ będzie bazą przestrzeni $K[x]_{\leqslant n}$.

$$M(\phi)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odnotujmy teraz następujące uogólnienie twierdzenia pokazanego na początku wykładu. Dowód jest w zasadzie powtórzeniem wcześniejszych argumentów.

Twierdzenie 2. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{B}$ będzie bazą W, przy czym $n = \dim V, m = \dim W$. Wówczas przyporządkowanie każdemu przekształceniu liniowemu $\phi \in L(V, W)$ jego macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zadaje izomorfizm $L(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$,* Aby zobaczyć jak istotna jest macierz przekształcenia liniowego konieczne jest określenie kolejnej naturalnej operacji na przekształceniach liniowych, nie zawsze wszakże możliwej do przeprowadzenia.

Definicja 2. *Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K.* ***Złożeniem przekształceń*** *ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to W$ zadane wzorem:*

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Oczywiście $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to także $\psi \circ \phi$ jest przekształceniem liniowym, bo dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ mamy:

$$(\psi \circ \phi)(\alpha + \beta) = \psi(\phi(\alpha + \beta)) = \psi(\phi(\alpha) + \phi(\beta)) = \psi(\phi(\alpha)) + \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\alpha) + (\psi \circ \phi)(\beta).$$

Powyższa definicja jest niezwykle istotna. W matematyce nieustannie spotykamy się z problemem składania wielu przekształceń i badaniem jak wyglądają „rozkłady". Podstawową trudnością jest fakt, że składanie przekształceń liniowych nie jest przemienne. Np. dla $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zadanych wzorami:

$$\phi(x, y) = (x, 0), \quad \psi(x, y) = (x, x)$$

mamy

$$(\psi \circ \phi)(x, y) = \psi(x, 0) = (x, x), \quad (\phi \circ \psi)(x, y) = \phi(x, x) = (x, 0).$$

Kluczowym zagadnieniem rozważanej teorii jest opisanie macierzy złożenia przekształceń liniowych. Warto zacząć od fundamentalnego przykładu.

Niech $g : K^n \to K, f : K \to K^n$ będą zadane wzorami:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad f(x) = (b_1x, b_2x, \ldots, b_nx),$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in K$. Macierze tych przekształceń w bazach standardowych mają postać:

$$M(g)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \quad M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $(g \circ f)(x) = g(b_1x, \ldots, b_nx) = (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x$. Macierz $g \circ f$ w bazach standardowych to:

$$M(g \circ f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Definicja 3. ***Iloczynem macierzy*** *$A = (a_{ij}) \in M_{m\times k}(K)$ oraz $B = (b_{ij}) \in M_{k\times n}(K)$ nazywamy taką macierz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdych i, j mamy:*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Innymi słowy: wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy C to suma iloczynów odpowiadających sobie l-tych wyrazów w i-tym wierszu macierzy A oraz w j-tym wierszu macierzy B.

Będziemy czasem, opisując mnożenie pewnych macierzy, używać nieco bardziej potocznego języka mówiąc, że wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy C z powyższej definicji jest, w nawiązaniu do przykładu opisanego w (†), *iloczynem i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B*. Nie jest to zbytnie nadużycie, bo wiersz oraz kolumna macierzy mogą być traktowane jak macierze i całą definicję mnożenia macierzy można oprzeć o zdefiniowaną jak wyżej operację na wektorach, spośród których jeden jest zapisany w formie wierszowej, a drugi – kolumnowej (to trzeba nazwać po imieniu – po prostu wykonujemy standardowy iloczyn skalarny, jak w Uzupełnieniu do wykładu o tw. Kroneckera-Capellego.)

Przykład. Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, to nie istnieje iloczyn macierzy postaci BA, zaś

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ważna motywacja 1. Jeśli dany jest układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

to układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ważna motywacja 2. Przy odpowiednim doborze baz macierz złożenia przekształceń liniowych jest iloczynem macierzy tych przekształceń. Mówi o tym następujący rezultat.

Twierdzenie 3. *Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:*

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Dowód. Rozważmy następujące bazy odpowiednio przestrzeni V, W, Z:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m), \quad \mathcal{C} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k).$$

Niech też dane będą macierze:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{ij}), \quad M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = (c_{ij})$$

dla odpowiednich zakresów i, j w każdej z macierzy. Z definicji macierzy przekształceń liniowych $\phi, \psi, \psi \circ \phi$:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_j) &= a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m, \\ \psi(\beta_l) &= b_{1l} \cdot \gamma_1 + b_{2l} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{kl} \cdot \gamma_k, \\ (\psi \circ \phi)(\alpha_j) &= c_{1j} \cdot \gamma_1 + c_{2j} \cdot \gamma_2 + \ldots + c_{kj} \cdot \gamma_k. \end{aligned}$$

Z definicji złożenia oraz liniowości ψ mamy jednak:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) &= \psi(a_{1j} \cdot \beta_1 + a_{2j} \cdot \beta_2 + \ldots + a_{mj} \cdot \beta_m) = \\ &= a_{1j} \cdot \psi(\beta_1) + a_{2j} \cdot \psi(\beta_2) + \ldots + a_{mj} \cdot \psi(\beta_m). \end{aligned}$$

Rozkładamy każdy z wektorów $\psi(\beta_l)$ w bazie $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) = a_{1j} &\cdot (b_{11} \cdot \gamma_1 + b_{21} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{k1} \cdot \gamma_k) + \\ + a_{2j} &\cdot (b_{12} \cdot \gamma_1 + b_{22} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{k2} \cdot \gamma_k) + \cdots \\ + a_{mj} &\cdot (b_{1m} \cdot \gamma_1 + b_{2m} \cdot \gamma_2 + \ldots + b_{km} \cdot \gamma_k). \end{aligned}$$

Grupujemy teraz wszystkie wyrazy stojące przy wektorach z bazy $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\alpha_j) = \psi(\phi(\alpha_j)) &= (a_{1j}b_{11} + a_{2j}b_{12} + \ldots + a_{mj}b_{1m})\gamma_1 + \\ &+ (a_{1j}b_{21} + a_{2j}b_{22} + \ldots + a_{mj}b_{2m})\gamma_2 + \cdots \\ &+ (a_{1j}b_{k1} + a_{2j}b_{k2} + \ldots + a_{mj}b_{km})\gamma_k. \end{aligned}$$

A zatem wyraz c_{ij}, stojący przy wektorze γ_i w powyższym przedstawieniu, równy jest

$$a_{1j}b_{i1} + a_{2j}b_{i2} + \ldots + a_{mj}b_{im},$$

czyli jest on *iloczynem* i-tego wiesza $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ i j-tej kolumny $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Uzyskaliśmy tezę. □

Ważna motywacja 3. Wykonywanie przekształcenia liniowego pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi może być interpretowane za pomocą mnożenia macierzy tego przekształcenia przez odpowiedni wektor współrzędnych. Oto niezbędny rezultat. Zachęcam do samodzielnego jego dowodu przy pomocy argumentu podanego wyżej[3], a ja „zamarkuję” poniżej nieco inny, być może ciekawy argument.

Twierdzenie 4. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ niech będzie bazą przestrzeni W. Jeśli*

- *$a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi wektora α w bazie $\mathcal{A}$,*
- *$b_1, \ldots, b_m$ są współrzędnymi wektora $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, to*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V i $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathrm{id} = \mathrm{id}_V$ jest identycznością na V, to dla każdego $\alpha \in V$: jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, zaś $b_1, \ldots, b_n$ są jego współrzędnymi w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Weźmy bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Oczywiście wektor współrzędnych wektora α_i w bazie $\mathcal{A}$ to i-ty wektor bazy standardowej w K^n, czyli $\epsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Weźmy macierz $A \in M_{m \times n}(K)$. Czym jest iloczyn: $A \cdot \epsilon_i^T$? Rezultatem jest po prostu i-ta kolumna macierzy A. Niech $k_1, \ldots, k_n$ to kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Mamy wtedy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} \cdot (a_1\epsilon_1^T + \ldots + a_n\epsilon_n^T). \qquad (*)$$

Teraz trzeba skorzystać z faktu, który pozostawię jako ćwiczenie, ale jest on zupełnie banalny.

Uwaga 2. *Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m \times k}(K)$ oraz macierzy $C, D \in M_{k \times n}(K)$ mamy równości:*

$$A(C + D) = AC + AD, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Wracamy do $(*)$ i korzystamy z uwagi wyżej oraz z obserwacji, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\epsilon_j^T = k_j$ (jak wyżej):

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1k_1 + \ldots + a_nk_n.$$

Zauważmy jednak, że k_i to wektor współrzędnych $\phi(\alpha_i)$ w bazie $\mathcal{B}$. A zatem powyższy wektor jest oczywiście wektorem współrzędnych $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$. □

Ważna motywacja 4. Zależności pomiędzy macierzami przekształceń.

Wniosek 1. *Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni V, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni W, to:*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}. \qquad (*)$$

Dowód. Z twierdzenia udowodnionego wcześniej mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

□

[3] Dowód ten jest również w skrypcie „Wykłady z algebry liniowej”.

Typowa sytuacja, w której można wykorzystać powyższy wzór jest następująca: przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ zadane jest pewnymi warunkami i chcemy wyznaczyć wzór tego przekształcenia.

Przykład. Niech $U = \mathrm{lin}((10, 14, -4)) \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz niech $W = \mathrm{lin}((0, 1, 0), (0, 1, 1))$ tak, że $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Wyznaczmy wzór na symetrię $\mathbb{R}^3$ względem U i wzdłuż W. Nazwijmy tą symetrię ϕ. Innymi słowy, szukamy $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{R}$ takich, że:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_2 + a_{12}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Powyższy warunek jest równoważny temu, że:

$$\phi((1, 0, 0)) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \quad \phi((0, 1, 0)) = (a_{12}, a_{22}, a_{32}), \quad \phi((0, 0, 1)) = (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

Innymi słowy szukamy macierzy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Oczywiście zgodnie z definicją symetrii mamy:

$$\begin{aligned} \phi((10, 14, -4)) &= (10, 14, -4) = 1 \cdot (10, 14, -4) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) \\ \phi((0, 1, 0)) &= \quad -(0, 1, 0) = 0 \cdot (10, 14, -4) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) \\ \phi((0, 1, 1)) &= \quad -(0, 1, 1) = 0 \cdot (10, 14, -4) + 0 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Nietrudno z tych warunków wywnoskować, że

$$\phi((0, 0, 1)) = \phi((0, 1, 1)) - \phi((0, 1, 0)), \quad \phi(1, 0, 0) = \frac{1}{10}\phi((10, 14, -4)) - \frac{7}{5}\phi((0, 1, 0)) + \frac{2}{5}\phi((0, 0, 1)),$$

ale naszym celem jest zaprezentowanie metody wykorzystującej formułę $(*)$.

Weźmy bazę $\mathcal{A} = ((10, 14, -4), (0, 0, 1), (0, 1, 1))$. Z warunków zapisanych wyżej wynika, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Możemy teraz skorzystać z formuły:

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}.$$

Wyznaczmy macierze $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$ oraz $M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}$. Dla każdego $v \in \mathbb{R}^3$ mamy $\mathrm{id}(v) = v$, czyli

$$\begin{aligned} \mathrm{id}((10, 14, -4)) &= (10, 14, -4) = 10 \cdot (1, 0, 0) + 14 \cdot (0, 1, 0) - 4 \cdot (0, 0, 1) \\ \mathrm{id}((0, 1, 0)) &= \quad (0, 1, 0) = \ \ 0 \cdot (1, 0, 0) + \ \ 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1) \\ \mathrm{id}((0, 1, 1)) &= \quad (0, 1, 1) = \ \ 0 \cdot (1, 0, 0) + \ \ 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Nietrudno trudniej jest wyznaczyć współrzędne wektorów bazy standardowej w bazie $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}((1, 0, 0)) = (1, 0, 0) &= \frac{1}{10} \cdot (10, 14, -4) - \frac{9}{5} \cdot (0, 1, 0) + \frac{2}{5} \cdot (0, 1, 1) \\ \mathrm{id}((0, 1, 0)) = (0, 1, 0) &= 0 \cdot (10, 14, -4) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) \\ \mathrm{id}((0, 0, 1)) = (0, 0, 1) &= 0 \cdot (10, 14, -4) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1). \end{aligned}$$

W szczególności:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{5} & 1 & -1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W rezultacie

$$M(\phi)_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{5} & 1 & -1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{18}{5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy więc szukany wzór:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, \frac{18}{5}x_1 - x_2 + 2x_3, x_3).$$

Następnym razem przyjrzymy się macierzom izomorfizmów w kontekście istnienia przekształcenia odwrotnego oraz mnożenia macierzy. Wprowadzimy przy tym fundamentalny obiekt – macierze odwracalne.