Jądro i obraz przekształcenia. Przestrzenie izomorficzne

Ostatnia aktualizacja: 6.12.2021 r.

Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy definicję przekształceń liniowych i poparliśmy ją wieloma przykładami motywującymi jej geometryczny charakter. Dziś przyjrzymy się kilku podstawowym pojęciom dotyczącym przekształceń liniowych, ciągle jednak wracając do intuicji związanych z pierwszą częścią wykładu, przede wszystkim z układami równań. Pokażemy w jaki sposób znane nam już twierdzenia można wyrazić w języku przekształceń liniowych pomiędzy przestrzeniami skończonego wymiaru. Na początku warto poczynić jednak kilka podstawowych uwag odnośnie samej definicji, którą teraz przypominamy.

Definicja 1. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy* ***przekształceniem liniowym****, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:*

(1) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(2) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$.

Stwierdzenie „przekształcenie liniowe” jest pewnym skrótem myślowym. Precyzyjniej byłoby powiedzieć, że przekształcenie ϕ zdefiniowane wyżej jest K-liniowe, co oznacza, że jest przekształceniem pomiędzy przestrzeniami liniowymi określonymi nad tym samym ciałem K. Rozważmy następujący, ważny przykład.

Przykład 1. Rozważmy $\mathbb{C}$ jako dwuwymiarową przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas przekształcenie $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem $\phi(z) = \overline{z}$ jest $\mathbb{R}$-liniowe. Rzeczywiście, dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, oraz dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{az_1} = a\overline{z_1}.$$

Natomiast sprzężenie nie jest przekształceniem $\mathbb{C}$-liniowym, czyli przekształceniem pomiędzy $\mathbb{C}^1$ oraz $\mathbb{C}^1$. Rzeczywiście, nie jest prawdą, że dla dowolnych $a \in \mathbb{C}$ oraz $z \in \mathbb{C}$ mamy $\overline{az} = a\overline{z}$, bowiem $\overline{az} = \overline{a} \cdot \overline{z}$.

Powyższy przykład pokazuje także, że w definicji przekształcenia liniowego warunek (2) nie wynika z warunku (1). Łatwo również sprawdzić, że poniższa funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia (2), ale nie spełnia (1):

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, 0), & \text{dla } y = 0 \\ (0, 0), & \text{dla } y \neq 0. \end{cases}.$$

Swoiste połączenie warunków (1) i (2) można uzyskać mówiąc, że przekształcenia liniowe to jedyne funkcje pomiędzy przestrzeniami liniowymi, które **zachowują kombinacje liniowe**.

Uwaga 1. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *$\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,*

(ii) *dla każdych $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ zachodzi*

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Dowód. Indukcja ze względu na k. Dla $k = 2$ teza wynika z definicji przekształcenia liniowego. Najpierw korzystamy z tego, że ϕ zachowuje dodawanie, a potem mnożenie przez skalar.

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = \phi(a_1\alpha_1) + \phi(a_2\alpha_2) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha).$$

Niech $k > 2$. Z definicji przekształcenia liniowego mamy:

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = \phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{k-1}\alpha_{k-1}) + a_k\phi(\alpha_k).$$

Korzystając z założenia indukcyjnego dostajemy implikację (i) $\Rightarrow$ (ii). Odwrotna implikacja jest oczywista. □

Wniosek 1. *Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Wówczas:*

- *jeśli A jest podprzestrzenią V, to $\phi(A)$ jest podprzestrzenią W,*
- *jeśli B jest podprzestrzenią W, to $\phi^{-1}(B)$ jest podprzestrzenią V.*

Umiemy rozróżniać przekształcenia liniowe od dowolnych przekształceń pomiędzy przestrzeniami liniowymi. Następująca kluczowa uwaga mówi w jaki sposób rozróżniać możemy między sobą przekształcenia liniowe. Jest ona prawdziwa dla dowolnych przestrzeni liniowych, ale ograniczamy się tu jedynie do przypadku skończenie wymiarowego.

Uwaga 2. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni V, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n$ niech będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni W. Wówczas istnieje* ***dokładnie jedno*** *takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że*

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n. \qquad (*)$$

Stwierdzenie to będziemy przywoływać często mówiąc w skrócie, że **przekształcenie liniowe zadane jest w sposób jednoznaczny na bazie**.

Dowód. Idea dowodu jest prosta. Pokażemy najpierw, że istnieje przekształcenie ϕ spełniające $(*)$, a następnie pokażemy, że jest tylko jedno takie przekształcenie.

Dla każdego $\alpha \in V$ istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ (czyli: współrzędne α w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Oznacza to, że poniższe przekształcenie ϕ jest dobrze określone:

$$\phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n.$$

Podstawiając za α kolejne α_i, dla $1 \leqslant i \leqslant n$, dostajemy oczywiście $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, bo jedyną niezerową współrzędną wektora α_i w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ jest i-ta współrzędna równa 1. A zatem ϕ spełnia $(*)$. Dlaczego jest liniowe? Jeśli $\alpha' = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n$, dla pewnych współrzędnych $a'_1, \ldots, a'_n$, to

$$\phi(\alpha + \alpha') = (a_1 + a'_1)\beta_1 + \ldots + (a_n + a'_n)\beta_n = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \phi(\alpha) + \phi(\alpha').$$

Podobnie pokazujemy, że dla każdego $a \in K$ mamy $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$. A zatem ϕ jest liniowe.

Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \\
&= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n = \\
&= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= \phi(\alpha).
\end{aligned}$$

A zatem przekształcenie liniowe ϕ spełniające $(*)$ jest wyznaczone jednoznacznie. □

Warto jest dokładnie przemyśleć i zrozumieć konsekwencje zaprzeczenia założeń powyższej uwagi.

- W przypadku, gdy układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo niezależny, ale nie rozpina V, dla ustalonego układu $\beta_1, \ldots, \beta_n$ w przestrzeni W może istnieć wiele różnych przekształceń liniowych spełniających $(*)$.

  Weźmy $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0)$. Układ $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni. Istnieje więc więcej niż jedno przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Jednym z nich jest identyczność, a drugim symetria względem płaszczyzny $\mathrm{lin}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(0, 0, 1)$,

- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nie jest liniowo niezależny, to dla pewnego układu $\beta_1, \ldots, \beta_n$ może nie istnieć przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ spełniające $(*)$.

  Weźmy $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (0, 1), \alpha_3 = (1, 1)$ oraz $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1, 0, 0)$. Teraz układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpina $\mathbb{R}^2$, ale jest liniowo zależny. Gdyby istniało takie przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, że $\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_2) = \phi(\alpha_3)$, to z liniowości ϕ mielibyśmy

  $$(0, 0, 0) = \phi((0, 0)) = \phi(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_3) = (1, 0, 0).$$

Zauważmy, że nie postawiliśmy żadnych warunków odnośnie układu wektorów $\{\beta_i\}$ – poza równolicznością z bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Wektory te mogą być nawet wszystkie równe wektorowi zerowemu przestrzeni W.

Powyższe rozważania pozwalają nam na klasyfikację wszystkich przekształceń liniowych pomiędzy przestrzenią K^n oraz K^m. Pokażemy mianowicie, że dla każdego takiego przekształcenia ϕ istnieje jednoznacznie wyznaczona macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

taka, że przekształcenie ϕ, zobrazowane na wektorach kolumnowych, ma następującą postać:

$$K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in K^m \qquad (\dagger)$$

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ zadane będzie na bazie standardowej warunkami:

$$f((1,0)) = (1,1,2,1), \quad f((0,1)) = (0,3,1,-2).$$

Wówczas z liniowości f mamy:

$$f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = x \cdot f((1,0)) + y \cdot f((0,1)) = x(1,1,2,1) + y(0,3,1,-2) = \\ = (x, x+3y, 2x+y, x-2y).$$

Patrząd kolumnowo f działa w nastepujący sposób:

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} x \\ x+3y \\ 2x+6 \\ x-2y \end{bmatrix}.$$

W powyższym przykładzie macierzą $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ przypisaną rozważanemu przekształceniu liniowemu f jest:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wniosek 2. *Każde przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez swoje wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.*

W szczególności, biorąc macierz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ i przypisując i-temu wektorowi standardowemu ϵ_i w K^n i-tą kolumnę macierzy A, czyli

$$\phi(\epsilon_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy wzór na ϕ postaci:

$$\begin{aligned} \phi((x_1,\ldots,x_n)) &= \phi(x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,\ldots,1)) = \\ &= \phi((x_1\epsilon_1 + \ldots x_n\epsilon_n)) = x_1\phi(\epsilon_1) + \ldots + x_n\phi(\epsilon_n) = \\ &= x_1(a_{11},\ldots,a_{m1}) + \ldots + x_n(a_{1n},\ldots,a_{mn}) = \\ &= (a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n). \end{aligned}$$

Nietrudno widzieć, że powyższe obserwacje mają odniesienia do układów równań. Mianowicie:

- jeśli dany jest jednorodny układ m równań liniowych o zbiorze n niewiadomych nad ciałem K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

  to zbiorem rozwiązań tego układu jest zbiór takich wektorów $(x_1,\ldots,x_n)$ z K^n, które po wykonaniu przekształcenia $\phi : K^n \to K^m$ danego wzorem $(\dagger)$ przechodzą w wektor zerowy,

- niejednorodny układ m równań liniowych o zbiorze n niewiadomych nad ciałem K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$ jest obrazem pewnego wektora $(x_1, \ldots, x_n)$ przy przekształceniu ϕ danym wzorem (†). Można też powiedzieć, że $\mathrm{im}(\phi)$ jest rozpięty przez kolumny macierzy współczynników powyższego układu.

Zdefiniujemy teraz pojęcia stanowiące abstrakcyjne odpowiedniki opisanych wyżej sytuacji.

Definicja 2. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

- ***Jądrem*** *przekształcenia ϕ nazywamy zbiór* $\ker(\phi) = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V$.
- ***Obrazem*** *przekształcenia ϕ nazywamy zbiór* $\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \mid \alpha \in V\} \subseteq W$.

Z Wniosku 1 wynika natychmiast, że jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ są odpowiednio podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V oraz W. Zobaczmy kilka przykładów.

- Jeśli $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane jest wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2,$$

to $\ker(\phi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

- Jeśli $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\phi(x) = (x, x, x),$$

to $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}((1, 1, 1))$.

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & s \neq 0 \\ V, & s = 0 \end{cases}, \quad \mathrm{im}(\phi) = \begin{cases} V & , s \neq 0 \\ \{0\} & , s = 0 \end{cases}.$$

- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:

$$\ker(\phi) = V_2, \quad \mathrm{im}(\phi) = V_1.$$

- Niech $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ jest pochodną, to:

$$\ker(\phi) = \{w \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(w) \leqslant 0\}, \quad \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}[x].$$

- (I jeszcze raz, bo to ważne...) Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n,\, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,\, \ldots,\, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas $\ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań o macierzy (a_{ij}), zaś $\mathrm{im}(\phi)$ to zbiór wektorów $\beta \in K^m$ takich, że układ o macierzy rozszerzonej $\left[(a_{ij}) \mid \beta\right]$ ma rozwiązanie. Zatem $\dim \mathrm{im}(f)$, to zarazem wymiar przestrzeni kolumnowej macierzy (a_{ij}). W szczególności, z formuły Grassmanna otrzymujemy $n = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f)$.

Kluczowy przykład

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots,\, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas $\ker(f) \subseteq K^n$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

A przestrzeń $\mathrm{im}(f) \subseteq K^m$? Jest to:

$$\mathrm{lin}(f(\epsilon_1), \ldots, f(\epsilon_n)) = \mathrm{lin}((a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn})).$$

W szczególności z tw. Kroneckera-Capellego:

$$n = \dim(K^n) = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f).$$

Powyższa obserwacja dotycząca wymiaru obrazu i jądra przekształcenia zadanego wzorem (†) uogólnia się na dowolne przekształcenia liniowe przestrzeni skończonego wymiaru (nie jest tak naprawdę uogólnienie, ale to zrozumiemy później). Odnotujmy, że we wzorze powyżej $\dim \mathrm{im}(f)$ równe jest rzędowi macierzy rozważanego układu. Stąd bierze nazwę poniższa definicja.

Definicja 3. *Wymiar przestrzeni* $\mathrm{im}(\phi)$ *nazywamy* ***rzędem przekształcenia****, ozn.* $r(\phi)$.

Uwaga 3. *Niech* $\phi : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym. Niech* U *będzie taką podprzestrzenią przestrzeni* V*, że* $V = \ker(\phi) \oplus U$*. Niech* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *będzie bazą przestrzeni* U*. Wówczas układ* $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ *jest bazą przestrzeni* $\mathrm{im}(\phi)$.

Wniosek 3. *Niech* $\phi : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

Dowód. Dowodzimy najpierw Uwagę. Pokażemy, że dla każdego dopełnienia prostego przestrzeni $\ker(\phi)$ i każdej jego bazy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zbiór wektorów $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ rozpina przestrzeń $\mathrm{im}(\phi)$. Następnie pokażemy, że układ ten jest liniowo niezależny.

Niech $\beta \in \mathrm{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$. Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$oraz $\alpha'' \in U$. A zatem $\alpha'' = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. Zatem:

$$\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'') = \phi(\alpha') + \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0 + a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\alpha_k \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$

Dowodzimy liniowej niezależności tego układu. Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$. Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi)$. Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U. A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$. A szczególności $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = 0$, bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U. Układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest zatem liniowo niezależny.

Dowód wniosku jest teraz natychmiastowy. Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim \ker(\phi) + \dim(U) = \dim \ker(\phi) + k = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

□

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru. Dowód wymaga pewnej modyfikacji, ale w rezultacie okazuje się, że jeśli $\phi : V \to W$ jest liniowe i $\dim(V) = \infty$, to wymiary przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi)$ nie mogą być jednocześnie skończenie wymiarowe.

Patrząc na formułę wiążącą wymiar jądra i obrazu przekształcenia liniowego warto pochylić się dłużej nad przypadkami, gdy $\dim \ker(\phi) = 0$ oraz, gdy $\dim \mathrm{im}(\phi) = \dim W$.

Definicja 4. *Przekształcenie liniowe* $\phi : V \to W$ *nazywamy:*

- ***monomorfizmem****, gdy* ϕ *jest różnowartościowe, to znaczy:*

  $$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

  dla każdych $\alpha, \beta \in V$.

- ***epimorfizmem****, gdy jest „na", tzn. gdy dla każdego* $\gamma \in W$ *istnieje* $\alpha \in V$ *takie, że* $\phi(\alpha) = \gamma$.

- ***izomorfizmem****, gdy* ϕ *jest różnowartościowe i „na" (to znaczy, gdy* ϕ *jest bijekcją).*

Wprowadzone nazewnictwo odnosi się bezpośrednio do pojęć: iniekcji, suriekcji i bijekcji stosowanych wobec funkcji. W naszym przypadku nie używamy tych pojęć, ponieważ poza teoriomnogościowymi własnościami funkcji, korzystać będziemy także z ich własności jako przekształceń liniowych.

Przykłady

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem
$$\phi(x) = (x, x, x),$$
jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem.

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane wzorem:
$$\phi(x, y, z) = x$$
jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

- Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dane wzorem:
$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$
jest izomorfizmem.

Uwaga 4. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

- *ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,*
- *ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.*

Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą równoważność. Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$, to skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$. Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$. Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$. W szczególności ϕ to monomorfizm. □

Wniosek 4. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\dim(V), \dim(W) < \infty$. Wówczas:*

- *jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leqslant \dim W$,*
- *jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leqslant \dim V$,*
- *jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.*

Co ważne, tezę punktu trzeciego można dla przestrzeni skończenie wymiarowych łatwo odwrócić.

Wniosek 5. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\dim V = \dim W < \infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) ϕ jest monomorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem,

(c) ϕ jest izomorfizmem.

Definicja 5. *Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.*

To właśnie izomorfizm przestrzeni liniowych jest pojęciem, które mówi o tym, że jakieś dwie przestrzenie są „jednakowe" z punktu widzenia algebry liniowej, czyli mają tą samą strukturę. Co to znaczy jednakowe? Przytoczymy teraz kilka rezultatów, które o tym mówią.

Twierdzenie 1. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Dowód. Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim(V) < \infty$. Ogólny przypadek dowodu przeprowadza się analogicznie, ale notacja jest bardziej uciążliwa (podwójne indeksy). Dowodzimy implikacje $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (i)$.

Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$. Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\mathrm{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$. Zatem ϕ przeprowadza bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W. Pokazaliśmy $(i) \Rightarrow (ii)$. Implikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ jest oczywista.

Przypuśćmy, że pewne przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W. Pokażemy, że ϕ jest izomorfizmem czyli, że $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz $\mathrm{im}(\phi) = V$.

Jeśli $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in \ker(\phi)$, to $0 = \phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, co wobec liniowej niezależności układu $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ oznacza, że $a_1 = \ldots = a_n = 0$. A zatem $\alpha = 0$. A zatem wobec dowolności wyboru α mamy $\ker(\phi) = \{0\}$.

Weźmy $\beta \in W$ i niech $\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$. Wówczas $\beta = \phi(\alpha)$, dla pewnego $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. A zatem z dowolności wyboru β mamy $W = \mathrm{im}(\phi)$. □

Rezultat ten pozwala nam udowodnić kluczowy wniosek.

Wniosek 6. *Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

W konsekwencji, mamy izomorfizm $V \simeq K^{\dim V}$.

Dowód. Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej w oparciu o formułę $\dim V = \dim\ker(\phi) + \dim\mathrm{im}(\phi)$, gdzie $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem. Implikacja $(ii) \Rightarrow (i)$ wynika natychmiast z twierdzenia powyżej. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi(V)$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wiadomo, że takie przekształcenie istnieje dla każdego układu wektorów W równolicznego z bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Takie przekształcenie ϕ, które wybraliśmy, musi być jednak izomorfizmem, bo przeprowadza bazę V na bazę W. Pozostałe implikacje są oczywiste. □

A zatem pokazaliśmy, że każda przestrzeń n-wymiarowa nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią K^n. Dodajmy, że istnieje wiele izomorfizmów pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami tego samego wymiaru. W szczególności, jeśli $\dim V = n$ wówczas dla każdej bazy $\mathcal{A}$ funkcja $\phi_{\mathcal{A}}$ postaci:

$$V \ni \alpha \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} (a_1, \ldots, a_n) \in K^n,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są (wyznaczonymi jednoznacznie!) współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, to $\phi_{\mathcal{A}}$ jest izomorfizmem. Do tematu tego wrócimy następnym razem.

W przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru trudno o analogiczne obserwacje. Po pierwsze nie każde dwie przestrzenie nieskończonego wymiaru są izomorficzne. Podstawowych argumentów dostarcza tu teoria mnogości. W przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru zachodzi więcej nieoczekiwanych fenomenów. Można pokazać, używając między innymi powyższych obserwacji, że V jest nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka jej podprzestrzeń właściwa $W \neq V$, że $W \simeq V$.

Nasze rozważania o podstawowych własnościach przekształceń liniowych są zakończone. Na tym wykładzie odnosiliśmy się, jak widać, głównie do teorii przedstawionej na poprzednich wykładach. Wykazaliśmy, że teoria przestrzeni skończenie wymiarowych i przekształceń pomiędzy nim jest „w zasadzie" teorią układów równań i geometrii ich rozwiązań. Nie znaczy to oczywiście, że nie mamy już nic do powiedzenia o takich przekształceniach – wręcz przeciwnie. Kolejnym krokiem na drodze do zrozumienia przekształceń liniowym, zawierającym już nowe jakościowo elementy, będzie badanie struktury wszystkich przekształceń liniowych pomiędzy przestrzeniami ustalonego wymiaru, nad ustalonym ciałem. Okaże się bowiem, że przekształcenia te same tworzą przestrzeń liniową. Co więcej, do rozważań wprowadzić można nową operację – składanie przekształceń, które zrewolucjonizuje nasze myślenie geometrii przekształceń liniowych, a także pozwoli na zupełnie nowe spojrzenie na teorię poznaną dotychczas.

Uzupełnienie. Układy współrzędnych

Pokazaliśmy właśnie izomorfizm przestrzeni skończenie wymiarowej V nad ciałem K z przestrzenią współrzędnych $K^{\dim V}$. Jak wspomnieliśmy, takich izomorfizmów jest wiele i polegają one na wyborze bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V i zadaniu funkcji $\phi_{\mathcal{A}}$ postaci:

$$V \ni \alpha \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} (a_1, \ldots, a_n) \in K^n,$$

gdzie $n = \dim V$ oraz $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$. Zobaczmy dwa przykłady.

- Przestrzeń wielomianów $K[x]_{\leqslant 3}$ stopnia nie większego niż 3 nad ciałem K na wymiar 4. Wybierzmy dwie bazy tej przestrzeni postaci:

  $$\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3), \quad \mathcal{B} = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3).$$

  Mamy zatem dwa izomorfizmy $\phi_{\mathcal{A}}, \phi_{\mathcal{B}} : K[x]_{\leqslant 3} \to K^4$ zadane warunkami:

  $$\begin{array}{llll} \phi_{\mathcal{A}}(1) = (1,0,0,0), & \phi_{\mathcal{A}}(x) = (0,1,0,0), & \phi_{\mathcal{A}}(x^2) = (0,0,1,0), & \phi_{\mathcal{A}}(x^3) = (0,0,0,1), \\ \phi_{\mathcal{B}}(1) = (1,0,0,0), & \phi_{\mathcal{B}}(x+1) = (0,1,0,0), & \phi_{\mathcal{B}}((x+1)^2) = (0,0,1,0), & \phi_{\mathcal{A}}((x+1)^3) = (0,0,0,1). \end{array}$$

  Biorąc np. wielomian $w(x) = x^3 + 1 = (x+1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x+1) \in K[x]$ mamy:

  $$\phi_{\mathcal{A}}(w(x)) = (1,0,0,1), \quad \phi_{\mathcal{B}}(w(x)) = (1,3,-3,1).$$

- Przestrzeń $W \subseteq K^4$ rozwiązań układu $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ jest trójwymiarowa i biorąc jej bazy:

  $$\mathcal{A} = ((1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)), \quad \mathcal{B} = ((-1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1))$$

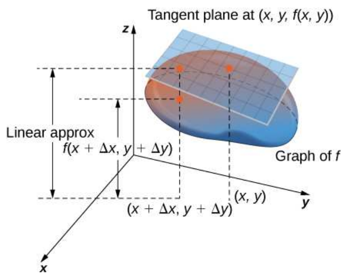
  dostajemy dwa izomorfizmy $\phi_{\mathcal{A}}, \phi_{\mathcal{B}} : W \to K^3$ zadane warunkami:

  $$\begin{array}{lll} \phi_{\mathcal{A}}((1,-1,0,0)) = (1,0,0), & \phi_{\mathcal{A}}((1,0,-1,0)) = (0,1,0), & \phi_{\mathcal{A}}((1,0,0,-1)) = (0,0,1), \\ \phi_{\mathcal{B}}((-1,1,0,0)) = (1,0,0), & \phi_{\mathcal{B}}((0,-1,1,0)) = (0,1,0), & \phi_{\mathcal{B}}((0,0,-1,1)) = (0,0,1). \end{array}$$

Definicja 6. *Izomorfizmy n-wymiarowej przestrzeni V nad V nad K na przestrzeń K^n nazywamy* ***układami współrzędnych*** *w V.* ***Układem współrzędnych związanych z bazą*** *$(v_1, \ldots, v_n)$ w V nazywamy izomorfizm $\sigma : V \to K^n$ przeprowadzający v_j na j-ty wektor bazy standardowej ϵ_j.*

W szczególności, biorąc dowolną bazę $\mathcal{A}$ w K^n można zadać na tej przestrzeni układ współrzędnych odpowiadający tej bazie. Warto jednak patrzeć na to ogólnie: tzw. współrzędne wektora v przestrzeni skończenie wymiarowej V w bazie $\mathcal{A}$, które już jakiś czas rozważamy, to nic innego jak obraz tego wektora w odpowiednim układzie współrzędnych wyznaczonym przez tę bazę, czyli $\phi_{\mathcal{A}}(v)$. Widzimy zatem, że mamy różne sposoby zadawania współrzędnych na przestrzeniach skończonego wymiaru. Jest to istotne, jak się przekonamy w drugim semestrze, choćby dlatego, że przekształcenia liniowe mogą wyznaczać pewne układy współrzędnych, w których geometria przekształcenia liniowego jest szczególnie dobrze widoczna.

Przywołana definicja znajduje się w skrypcie Profesorów Chabera i Pola, natomiast nie ma jej w obowiązującym nas skrypcie z uwagi na to, że po prostu rozważać będziemy głównie przekształcenia przestrzeni K^n i wskazywanie ich izomorfizmów z jakimiś innymi obiektami nie będzie miało dużego znaczenia (pojawią się wprawdzie układy bazowe, które są w zasadzie afinicznymi układami współrzędnych...). Inna będzie natomiast sytuacja w analizie czy geometrii różniczkowej, gdzie zadawanie „lokalnych układów współrzędnych" na przestrzeniach stycznych i badanie związków pomiędzy tymi układami (zadanymi na płaszczyznach stycznych w różnych punktach wykresu) będzie miało podstawowe znaczenie.



Lokalny układ współrzędnych na przestrzeni stycznej to jedno z podstawowych zagadnień w analizie funkcji wielu zmiennych.

Zainteresowanych szczegółami odsyłam do źródła tej grafiki: `https://philschatz.com/calculus-book/contents/m53937.html`.