Algebra (głównie liniowa) na IMC

Rozwiązania: `https://www.imc-math.org.uk/`

1 Algebra liniowa (łatwe)

Zadanie 1 (IMC 1994)**.** *Niech A będzie odwracalną macierzą symetryczną rozmiaru $n \times n$, gdzie $n \geqslant 2$, o wyrazach rzeczywistych dodatnich. Pokaż, że $z_n \leqslant n^2 - 2n$, gdzie z_n jest liczbą wyrazów zerowych w macierzy A^{-1}. Ile zerowych wyrazów ma odwrotność macierzy rozmiaru $n \times n$ postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \dots \end{bmatrix}?$$

Zadanie 2 (IMC 1994)**.** *Niech A będzie macierzą diagonalną rozmiaru $n \times n$ o wielomianie charakterystycznym $(x - c_1)^{d_1}(x - c_2)^{d_2} \dots (x - c_k)^{d_k}$, gdzie $c_1, c_2, \dots, c_k$ są parami różne (czyli c_1 pojawia się d_1 razy na przekątnej, c_2 pojawia się d_2 razy na przekątnej, itd. oraz $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$). Niech V będzie przestrzenią wszystkich macierzy rozmiaru $n \times n$ złożonej z macierzy B spełniających $AB = BA$. Pokaż, że wymiar przestrzeni V to $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2$.*

Zadanie 3 (IMC 1995)**.** *Niech X będzie macierzą odwracalną o kolumnach $X_1, X_2, \dots, X_n$. Niech Y będzie macierzą o kolumnach $X_2, X_3, \dots, X_n, 0$. Pokaż, że macierze $A = YX^{-1}$ oraz $B = X^{-1}Y$ mają rząd $n - 1$ i ich jedyną wartością własną jest 0.*

Zadanie 4 (IMC 1995)**.** *Niech A będzie rzeczywistą macierzą rozmiarów 3×3 taką, że dla dowolnego wektora kolumnowego $u \in \mathbb{R}^3$ wektory Au oraz u są prostopadłe. Wykaż, że:*

- $A^T = -A$,
- *dla każdego wektora $u \in \mathbb{R}^3$ istnieje wektor $v \in \mathbb{R}^3$ taki, że $Au = v \times u$.*

Zadanie 5 (IMC 1996)**.** *Dla ustalonych $a_0, d \in \mathbb{R}$ oraz liczb $j = 0, \dots, n$ niech $a_j = a_0 + jd$. Oblicz wyznacznik macierzy A, gdzie*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 (IMC 1997)**.** *Niech M będzie macierzą odwracalną rozmiaru $2n \times 2n$ reprezentowaną w postaci blokowej przez*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że $\det M \cdot \det H = \det A$.

Zadanie 7 (IMC 1997). *Rozważmy funkcjonał liniowy* $f \in M_n(\mathbb{R})^*$. *Pokaż, że istnieje dokładnie jedna macierz* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *taka, że* $f(A) = \operatorname{tr}(AC)$ *Wykaż, że przy dodatkowym założeniu* $f(AB) = f(BA)$, *dla dowolnych* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *istnieje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takie, że* $f(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.

Zadanie 8 (IMC 1998). *Niech* V *będzie* 10-*wymiarową przestrzenią liniową nad* $\mathbb{R}$ *oraz niech* U_1, U_2 *będą podprzestrzeniami spełniającymi* $U_1 \subseteq U_2$, $\dim U_1 = 3$ *oraz* $\dim U_2 = 6$. *Niech* $\Sigma \subseteq \operatorname{End}(V)$ *będzie złożona ze wszystkich endomorfizmów* ϕ *takich, że* U_1, U_2 *są* ϕ-*niezmiennicze. Oblicz* $\dim(\Sigma)$.

Zadanie 9 (IMC 1998). *Niech* V *będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz* $f, f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$. *Załóżmy, że* $f(x) = 0$, *jeśli tylko* $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x) = 0$. *Pokaż, że* $f \in \operatorname{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

Zadanie 10 (IMC 2000). *Niech* A, B *będą zespolonymi macierzami kwadratowymi tych samych rozmiarów, przy czym* $r(AB - BA) = 1$. *Pokaż, że* $(AB - BA)^2 = 0$.

Zadanie 11 (IMC 2001). *Niech* n *będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy macierz rozmiaru* $n \times n$ *o wyrazach* $1, 2, \ldots, n^2$ *zapisanych kolejno od lewego górnego rogu aż do prawego dolnego. Wybierzmy* n *wyrazów tej macierzy tak, by z każdej kolumny i każdego wiersza wybrany był dokładnie jeden. Jakie są możliwe sumy wybranych elementów?*

Zadanie 12 (IMC 2002). *Oblicz wyznacznik macierzy* $A = a_{ij}$ *rozmiaru* $n \times n$, *gdzie:*

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j \\ 2, & i = j. \end{cases}.$$

Zadanie 13 (IMC 2002). *Niech* A *będzie zespoloną macierzą rozmiaru* $n \times n$, *gdzie* $n > 1$. *Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

- *A jest macierzą unitarną,*
- *istnieje macierz odwracalna* $S \in M_n(\mathbb{C})$ *taka, że* $A = S\overline{S}^{-1}$ *(jeśli* $S = [s_{ij}]$, *to* $\overline{S} = [\overline{s_{ij}}]$*).*

Zadanie 14 (IMC 2003). *Niech* A *będzie macierzą rzeczywistą rozmiaru* $n \times n$ *spełniającą* $3A^3 = A^2 + A + I$. *Pokaż, że ciąg macierzy postaci* A^k *zbiega do macierzy idempotentnej (czyli takiej, której kwadrat równy jest niej samej).*

Zadanie 15 (IMC 2003). *Niech* A, B *będą macierzami rzeczywistymi rozmiaru* $n \times n$ *takimi, że* $AB + A + B = 0$. *Pokaż, że* $AB = BA$.

Zadanie 16 (IMC 2004). *Niech* A *będzie macierzą rzeczywistą rozmiaru* 4×2 *oraz niech* B *będzie macierzą rzeczywistą rozmiaru* 2×4 *taką, że*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź BA.

Zadanie 17 (IMC 2005). *Niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times n$, której (i,j)-ty wyraz równy jest $i+j$, dla wszystkich $i,j = 1,2,\ldots,n$. Ile wynosi rząd macierzy A?*

Zadanie 18 (IMC 2005). *Znajdź maksymalny możliwy wymiar podprzestrzeni V przestrzeni macierzy rzeczywistych rozmiaru $n \times n$ takich, ze dla dowolnych $X, Y \in V$ mamy $\operatorname{tr}(XY) = 0$.*

Zadanie 19 (IMC 2006). *Niech v_0 będzie wektorem zerowym w $\mathbb{R}^n$ i niech $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ będą takie, że norma euklidesowa $\|v_i - v_j\|$ jest wymierna, dla każdych $0 \leqslant i,j, \leqslant n+1$. Wykaż, że $v_1, \ldots, v_{n+1}$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^n$ traktowanym jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Q}$.*

Zadanie 20 (IMC 2007). *Niech $n > 1$ będzie dodatnią liczbą nieparzystą oraz niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą rozmiaru $n \times n$ spełniającą:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 1, & i - j = \pm 2 \ (\ mod\ n) \\ 0, & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases} .$$

Znajdź $\det A$.

Zadanie 21 (IMC 2008). *Niech $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ oraz załóżmy, ze A jest macierzą odwracalną. Udowodnij, że jeśli $(A - B)C = BA^{-1}$, to $C(A - B) = A^{-1}B$.*

Zadanie 22 (IMC 2011). *Czy istnieje rzeczywista macierz A rozmiaru 3×3 spełniająca warunki* $\operatorname{tr}(A) = 0$ *oraz $A^2 + A^T = I$?*

Zadanie 23 (IMC 2012). *Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznacz najmniejszy możliwy rząd macierzy rozmiaru $n \times n$, która ma zera na głównej przekątnej oraz dodatnie wyrazy rzeczywistej poza przekątną.*

Zadanie 24 (IMC 2013). *Niech A, B będą rzeczywistymi macierzami symetrycznymi, których wszystkie wartości własne są większe niż 1. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną macierzy AB. Pokaż, że $|\lambda| > 1$.*

Zadanie 25 (IMC 2014). *Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b), dla których istnieje dokładnie jedna symetryczna macierz rzeczywista M rozmiaru 2×2 taka, że $tr(M) = a$ oraz* $\det(M) = b$.

Zadanie 26 (IMC 2016). *Niech k, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg $(A_1, \ldots, A_k)$ macierzy rzeczywistych rozmiaru $n \times n$ nazywamy preferowanym, jeśli $A_i^2 \neq 0$, dla $1 \leqslant k \leqslant i$, ale $A_iA_j = 0$, dla $1 \leqslant i,j \leqslant k$ oraz $i \neq j$. Pokaż, że w każdym ciągu preferowanym mamy $k \leqslant n$ oraz podaj przykład ciągu preferowanego spełniającego $k = n$, dla każdego n.*

Zadanie 27 (IMC 2017). *Wyznacz wszystkie liczby zespolone λ, dla których istnieje liczba całkowita dodatnia n oraz macierz rzeczywista A rozmiaru $n \times n$ taka, że $A^2 = A^T$, przy czym λ jest wartością własną A.*

Zadanie 28 (IMC 2018). *Niech k będzie liczbą całkowitą. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje k niezerowych wektorów $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ takich, że dla każdej pary i, j indeksów spełniających $|i - j| > 1$ wektory v_i oraz v_j są prostopadłe.*

Zadanie 29 (IMC 2019)**.** *Rozstrzygnij czy istnieje dodatnia liczba nieparzysta n oraz macierze A, B rozmiaru $n \times n$ o wyrazach całkowitych, spełniająca następujące warunki:*

- $\det(B) = 1$,
- $AB = BA$,
- $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$.

Zadanie 30 (IMC 2021)**.** *Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ spełniającą warunek $A^3 = 0$.*

(a *Pokaż, że istnieje dokładnie jedna macierz rzeczywista X rozmiaru n spełniająca warunek:*

$$X + AX + XA^2 = A.$$

(b *Wyznacz X za pomocą A.*

Zadanie 31 (IMC 2021)**.** *Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Załóżmy, ze istnieje liczba całkowita dodatnia m oraz rzeczywista macierz symetryczna B taka, że*

$$2021B = A^m + B^2.$$

Pokaż, że $|\det A| \leqslant 1$.

Zadanie 32 (IMC 2022)**.** *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź wszystkie rzeczywiste macierze $A \in M_n(\mathbb{R})$ mające jedynie rzeczywiste wartości własne i spełniające warunek*

$$A + A^k = A^T,$$

dla pewnego $k \neq n$.

2 Algebra liniowa (trudniejsze)

Zadanie 33 (IMC 1994)**.** *Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i załóżmy, że F, G są endomorfizmami $\mathbb{R}^n$ spełniającymi $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.*

(a *Pokaż, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha \cdot k \cdot F^k$.*

(b *Pokaż, że istnieje $k \geqslant 1$ takie, że $F^k = 0$.*

Zadanie 34 (IMC 1994)**.** *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ będą wektorami w m-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, przy czym $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$. Pokaż, że istnieje permutacja π liczb całkowitych $\{1, 2, \ldots, k\}$ taka, że:*

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$$

dla każdego $n = 1, 2, \ldots, k$.

Zadanie 35 (IMC 1995)**.** *Niech A oraz B będą rzeczywistymi macierzami rozmiaru $n \times n$. Załóżmy, że istnieje $n + 1$ parami różnych liczb rzeczywistych $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ takich, że macierze $C_i = A + t_iB$ są nilpontentne, dla $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Pokaż, że zarówno A, jak i B są macierzami nilpotentnymi.*

Zadanie 36 (IMC 1996)**.** *Przekształcenie liniowe A na przestrzeni liniowej V nazywamy inwolucją, jeśli $A^2 = E$, gdzie E jest identycznością na V. Niech* $\dim V = n < \infty$*.*

- *Pokaż, że dla każdej inwolucji A na V istnieje baza V składająca się z wektorów własnych A.*
- *Znajdź największą liczbę parami różnych i przemiennych inwolucji na V.*

Zadanie 37 (IMC 1997)**.** *Niech A, B będą rzeczywistymi macierzami rozmiaru $n \times n$ takimi, że $A^2 + B^2 = AB$. Pokaż, że jeśli macierz $BA - AB$ jest odwracalna, to n jest podzielna przez* 3*.*

Zadanie 38 (IMC 1999)**.** *Pokaż, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje macierz rzeczywista A rozmiaru $m \times m$ taka, że $A^3 = A + I$, gdzie I jest macierzą identycznościową rozmiaru $m \times m$. Pokaż, że dla każdej rzeczywistej macierzy A rozmiaru $m \times m$ spełniającej $A^3 = A + I$ zachodzi* $\det A > 0$*.*

Zadanie 39 (IMC 2004)**.** *Dla $n \geqslant 1$ niech M będzie zespoloną macierzą rozmiaru $n \times n$ o parami różnych wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ o krotnościach odpowiednio $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Rozważmy przekształcenie liniowe L_M określone wzorem $L_M(X) = MX + XM^T$, dla każdej $X \in M_n(\mathbb{C})$. Znajdź wartości własne (wraz z krotnościami) endomorfizmów L_M.*

Zadanie 40 (IMC 2007)**.** *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Jaki jest najmniejszy i największy możliwy rząd macierzy rozmiaru $n \times n$, której n^2 wyrazów to zbiór złożony z liczb $1, 2, \ldots, n^2$.*

Zadanie 41 (IMC 2008)**.** *Niech $n > 1$ będzie dodatnią liczbą nieparzystą oraz niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą rozmiaru $n \times n$ spełniającą:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j \textit{ jest liczbą pierwszą}, \\ 0, & \textit{w przeciwnym przypadku}. \end{cases}$$

Udowodnij, że $\det A$ *jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 42 (IMC 2009)**.** *Niech l będzie prostą, zaś P - punktem w $\mathbb{R}^3$. Niech S będzie zbiorem złożonym z takich punktów X, których odległość od l jest większa lub równa dwukrotności odległości X od P. Znajdź miarę 3-wymiarową zbioru S wiedząc, że odległość P od l wynosi $d > 0$.*

Zadanie 43 (IMC 2009)**.** *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ będą dwiema macierzami rozmiaru $n \times n$ takimi, że $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Udowodnij, że istnieje dodatnia liczba całkowita k taka, że $(AB - BA)^k = 0$.*

Zadanie 44 (IMC 2010)**.** *Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi z przedziału $[-1, 1]$ takimi, że $1+2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Pokaż, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n mamy:*

$$1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

Zadanie 45 (IMC 2010)**.** *Niech A będzie symetryczną macierzą rozmiaru $m \times m$ dna ciałem dwuelementowym, której wszystkie elementy z przekątnej równe są zero. Pokaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n każda kolumna macierzy A^n ma wyraz zerowy.*

Zadanie 46 (IMC 2011)**.** *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech V będzie $(2n-1)$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem dwuelementowym. Pokaż, ze dla dowolnych wektorów $v_1, \ldots, v_{4n-1} \in V$ istnieje ciąg $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{2n} \leqslant 4n - 1$ indeksów takich, że $v_{i_1} + \ldots + v_{i_{2n}} = 0$.*

Zadanie 47 (IMC 2013). *Przypuśćmy, że $v_1, \ldots, v_d$ są wektorami długości 1 w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$. Pokaż, że istnieje wektor u długości 1 taki, że:*

$$|\langle u, v_i\rangle| \leqslant 1/\sqrt{d}.$$

Zadanie 48 (IMC 2014). *Niech $A = (a_{ij})$ będzie symetryczną macierzą rzeczywistą rozmiaru $n \times n$, oraz niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą jej wartościami własnymi. Pokaż, że:*

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{ii}a_{jj} \geqslant \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \lambda_i\lambda_j$$

i wyznacz wszystkie macierze, dla których zachodzi równość.

Zadanie 49 (IMC 2015). *Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ oraz dwóch macierzy rzeczywistych A, B rozmiaru $n \times n$ spełniających równanie $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$ zachodzi $\det(A) = \det(B)$. Czy jest to prawda dla macierzy zespolonych?*

Zadanie 50 (IMC 2018). *Wyznacz wszystkie liczby wymierne a, dla których macierz*

$$\begin{bmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{bmatrix}$$

jest kwadratem macierzy wymiernej.

Zadanie 51 (IMC 2019). *Liczba czterocyfrowa $YEAR$ nazywana jest dobrą, jeśli układ równań liniowych*

$$\begin{cases} Yx + Ey + Az + Rw &= Y \\ Rx + Yy + Ez + Aw &= E \\ Ax + Ry + Yz + Ew &= A \\ Ex + Ay + Rz + Yw &= R \end{cases}$$

o zmiennych x, y, z, w ma co najmniej dwa rozwiązania. Znajdź wszystkie dobre liczby należące do przedziału $[2001, 2100]$.

Zadanie 52 (IMC 2019). *Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieją rzeczywiste macierze odwracalne A, B rozmiaru $n \times n$ spełniające $AB - BA = B^2A$.*

Zadanie 53 (IMC 2020). *Niech A, B będą rzeczywistymi macierzami rozmiaru $n \times n$ spełniającymi $r(AB - BA + I) = 1$, gdzie I jest macierzą identycznościową rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:*

$$\mathrm{tr}(ABAB) - \mathrm{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Zadanie 54 (IMC 2021). *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Jaka jest największa liczba różnych wektorów długości 1 w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ takich, że z każdych trzech z nich można wybrać dwa prostopadłe?*

3 Algebra liniowa (trudne)

Zadanie 55 (IMC 2000)**.** *Dla rzeczywistej macierzy A rozmiaru $m \times m$ definiujemy macierz e^A jako $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$. Rozstrzygnij, czy dla dowolnego wielomianu p o współczynnikach rzeczywistych oraz dowolnych rzeczywistych macierzy A, B rozmiaru $m \times m$ macierz $p(e^{AB})$ jest nilpotentna wtedy i tylko, gdy macierz $p(e^{BA})$ jest nilpotentna.*

Zadanie 56 (IMC 2001)**.** *Niech A będzie zespoloną macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że $A \neq \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokaż, że A jest podobna do macierzy mającej co najmniej jeden niezerowy wyraz na głównej przekątnej.*

Zadanie 57 (IMC 2001)**.** *Znajdź największa liczbę punktów na sferze o promieniu 1 w $\mathbb{R}^n$ takich, że odległość pomiędzy nimi jest większa od $\sqrt{2}$.*

Zadanie 58 (IMC 2002)**.** *Dla macierzy rzeczywistej M rozmiaru $n \times n$ określamy:*

$$\|M\| = \sum_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2},$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ oznacza normę euklidesową[1] na $\mathbb{R}^n$. załóżmy, że macierz rzeczywista A rozmiaru $n \times n$ spełnia $\|A^k - A^{k-1}\| \leqslant \frac{1}{2002k}$, dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych k. Pokaż, że $\|A^k\| \leqslant 2002$, dla każdej dodatniej liczby całkowitej k.

Zadanie 59 (IMC 2004)**.** *Dla $n \geqslant 0$ określamy macierze A_n, B_n w następujący sposób: $A_0 = B_0 = (1) \in M_1(K)$ oraz dla $n > 0$:*

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech suma wyrazów macierzy M wynosi $S(M)$. Pokaż, że $S(A_n^{k-1}) = S(A_k^{n-1})$, dla każdych $n, k \geqslant 1$.

Zadanie 60 (IMC 2006)**.** *Niech A będzie macierzą całkowitoliczbową rozmiaru $n \times n$ oraz niech $b_1, \ldots, b_k$ będą liczbami całkowitymi spełniającymi $\det A = b_! \cdot \ldots \cdot b_k$. Wykaż, że istnieją macierze $B_1, \ldots, B_k$ rozmiaru $n \times n$ takie, że $A = B_1 \cdot \ldots \cdot B_k$, gdzie $\det B_i = b_i$, dla $i = 1, \ldots, k$.*

Zadanie 61 (IMC 2006)**.** *Niech $A_i, B_i, S_i (i = 1, 2, 3)$ będą odwracalnymi macierzami rzeczywistymi rozmiaru 2×2 takimi, że:*

(1 nie wszystkie A_i mają wspólny wektor własny o rzeczywistej wartości własnej,

(2 $A_i = S_i^{-1} B_i S_i$, dla wszystkich $i = 1, 2, 3$,

(3 $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 62 (IMC 2007)**.** *Dla każdego dodatniego k znajdź najmniejszą liczbę dodatnią n_k, dla której istnieją rzeczywiste macierze $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rozmiarów $n_k \times n_k$ spełniające następujące warunki:*

(1 $A_1^2 = A_2^2 = \ldots = A_k^2 = 0$,

(2 $A_iA_j = A_jA_i$, dla wszystkich $1 \leqslant i, j \leqslant k$ oraz

[1] Chodzi o normę standardową. Indeks 2 odnosi się do tzw. l_p-normy na $\mathbb{R}^n$.

(3 $A_1A_2\dots A_k \neq 0$.

Zadanie 63 (IMC 2009). *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy n-sympleks w $\mathbb{R}^n$ rozpięty przez $n+1$ punktów $P_0, P_1, \dots, P_n$ zwane jego wierzchołkami, które nie należą wszystkie do tej samej hiperpłaszczyzny. Dla każdego n-sympleksu S przez $v(S)$ oznaczamy objętość S, zaś przez $C(S)$ oznaczamy środek jedynej sfery zawierającej wszystkie wierzchołki S. Przypuśćmy, że P jest punktem wewnątrz n-sympleksu S. Niech S_i będzie n-sympleksem otrzymanym z S przez zamianę i-tego wierzchołka przez P. Udowodnij, że:*

$$v(S_0)C(S_0) + v(S_1)C(S_1) + \dots + v(S_n)C(S_n) = v(S)C(S).$$

Zadanie 64 (IMC 2009). *niech $\mathbb{M}$ będzie przestrzenią liniową złożoną z macierzy rzeczywistych rozmiaru $m \times p$. Dla podprzestrzeni liniowej $S \subseteq \mathbb{M}$, przez $\delta(S)$ oznaczamy wymiar przestrzeni generowanej przez wszystkie kolumny wszystkich macierzy w S. Mówimy, że podprzestrzeń $T \subseteq \mathbb{M}$ jest nakrywającą przestrzenią macierzy, jeśli*

$$\bigcup_{A \in T, A \neq 0} \ker A = \mathbb{R}^p,$$

Taka podprzestrzeń zwana jest minimalną, jeśli nie zawiera w sposób właściwy mniejsze podprzestrzeni nakrywającej.

(a *Niech T będzie minimalną nakrywającą podprzestrzenią $S \subseteq T$ i niech $n = \dim T$. Pokaż, że:*

$$\delta(T) \leqslant \binom{n}{2}.$$

(b *Pokaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n można znaleźć m, p oraz minimalną nakrywającą przestrzeń macierzy T, jak wyżej, taką, że $\dim T = n$ oraz $\delta(T) = \binom{n}{2}$.*

Zadanie 65 (IMC 2015). *Niech $n \geqslant 2$ oraz niech $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ będzie układem $n+1$ punktów w n wymiarowej przestrzeni euklidesowej, nieleżących na jednej hiperpłaszczyźnie. Niech B będzie punktem ściśle wewnątrz otoczki wypukłej $A_1, \dots, A_{n+1}$. Pokaż, że dla co najmniej n par (i,j), gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ miara kąta A_iBA_j jest większa niż $\pi/2$.*

Zadanie 66 (IMC 2015). *Macierz zespoloną A rozmiaru $n \times n$ nazwiemy normalną, jeśli $A^TA = A^TA$, gdzie A^T jest macierzą transponowaną do A. Dla każdego n wyznacz największy możliwy wymiar podprzestrzeni przestrzeni macierzy zespolonych rozmiaru $n \times n$ zawierającej jedynie macierze normalne.*

Zadanie 67 (IMC 2016). *Niech A będzie zespoloną macierzą rozmiaru $n \times n$, której wartości własne mają moduł nie większy niż 1. Pokaż, że:*

$$\|A\| \leqslant \frac{n}{\ln 2}\|A\|^{n-1},$$

gdzie $\|B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1\|} \|Bx\|$, dla każdej macierzy B rozmiaru $n \times n$ oraz , gdzie $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Zadanie 68 (IMC 2017). *Określamy ciąg $A_1, A_2, \dots$ macierzy spełniających następującą rekurencję:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{bmatrix}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie I_m jest macierzą identycznościową rozmiaru $m \times m$. Pokaż, że A_n ma $n+1$ różnych całkowitych wartości własnych $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ o krotnościach równych odpowiednio $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

Zadanie 69 (IMC 2018)**.** *Niech p, q będą liczbami pierwszymi, przy czym $p < q$. Załóżmy, że wielokąt wypukły $P_1P_2 \dots P_{pq}$ jest równokątny, zaś długości jego boków są całkowitymi liczbami dodatnimi. Pokaż, że:*

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_kP_{k+1} \geqslant \frac{k^3+k}{2},$$

jest spełnione dla każdego $1 \leqslant k \leqslant p$.

4 Wielomiany oraz liczby zespolone (nietrudne)

Zadanie 70 (IMC 1995)**.** *Załóżmy, że wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)$ stopnia n o współczynnikach zespolonych leżą na okręgu $|z| = 1$. Pokazać, że na okręgu tym leżą także wszystkie pierwiastki wielomianu $2zP'(z) - nP(z)$.*

Zadanie 71 (IMC 1998)**.** *Niech P będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych mającym n rzeczywistych pierwiastków. Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność:*

$$(n-1)(P'(x))^2 \geqslant nP(x)P''(x),$$

oraz wyznacz wielomiany, dla których zachodzi równość.

Zadanie 72 (IMC 2000)**.** *Niech $p(x) = x^5 + x$ oraz $q(x) = x^5 + x^2$. Znajdź wszystkie pary (w, z) liczb zespolonych, gdzie $w \neq z$, dla których $p(w) = p(z)$ oraz $q(w) = q(z)$.*

Zadanie 73 (IMC 2001)**.** *Niech $r, s \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi oraz $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$, $b_0, b_1, \dots, b_{s-1}$ będą liczbami rzeczywistymi nieujemnymi takimi, że:*

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r)(b_0 + b_1x + \ldots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{r+s-1} + x^{r+s}.$$

Pokaż, że każda z liczb a_i oraz b_j równa jest 0 lub 1.

Zadanie 74 (IMC 2005)**.** *Niech $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $(f(x))^n$ jest wielomianem, dla każdego $n = 2, 3, \dots$. Czy wynika stąd, że f jest wielomianem?*

Zadanie 75 (IMC 2007)**.** *Niech f będzie wielomianem stopnia 2 o współczynnikach. Załóżmy, że $f(k)$ jest podzielna przez 5, dla każdego k całkowitego. Udowodnij, że wszystkie współczynniki f są podzielne przez 5.*

Zadanie 76 (IMC 2007)**.** *Wielomian $P(x_1, \dots, x_k)$ nazwiemy dobrym, jeśli istnieją macierze rzeczywiste $A_1, \dots, A_k$ rozmiaru 2×2 takie, że*

$$P(x_1, \dots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_iA_i\right).$$

Znajdź wszystkie wartości k, dla których wszystkie jednorodne wielomiany k zmiennych stopnia 2 są dobre.

Zadanie 77 (IMC 2008)**.** *Niech p będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych i niech $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ będą liczbami całkowitymi.*

(a Udowodnij, że istnieje $a \in \mathbb{Z}$ takie, że $p(a_i)$ dzieli $p(a)$, dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$.

(b Czy istnieje $a \in \mathbb{Z}$ takie, że iloczyn $p(a_1) \cdot \ldots \cdot p(a_k)$ dzieli $p(a)$?

Zadanie 78 (IMC 2008)**.** *Niech $\mathbb{Z}[x]$ będzie pierścieniem wielomianów o współczynnikach całkowitych i niech $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ będą niestałymi wielomianami takimi, że $g(x)$ dzieli $f(x)$ w $\mathbb{Z}[x]$. Pokaż, że jeśli wielomian $f(x) - 2008$ ma co najmniej 81 różnych pierwiastków całkowitych, to stopień $g(x)$ jest większy niż 5.*

Zadanie 79 (IMC 2008)**.** *Niech n, k będą całkowitymi liczbami dodatnimi. Przypuśćmy, że wielomian $x^{2k} - x^k + 1$ dzieli $x^{2n} + x^n + 1$. Pokaż, że $x^{2k} + x^k + 1$ dzieli $x^{2n} + x^n + 1$.*

Zadanie 80 (IMC 2013)**.** *Niech z będzie liczbą zespoloną spełniającą warunek $|z + 1| > 2$. Pokaż, że $|z^3 + 1| > 1$.*

Zadanie 81 (IMC 2014)**.** *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że istnieją dodatnie liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla dowolnego wyboru znaków wielomian*

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \ldots \pm a_1 x \pm a_0$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 82 (IMC 2022)**.** *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje dokładnie jedno $a \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takie, że $a^3 - 3a + 1$ jest liczbą podzielną przez p.*

5 Wielomiany oraz liczby zespolone (niełatwe)

Zadanie 83 (IMC 2000)**.** *Niech $p(z)$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych. Udowodnij, że istnieje co najmniej $n + 1$ liczb zespolonych z takich, że $p(z)$ równy jest 0 lub 1.*

Zadanie 84 (IMC 2001)**.** *Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $p(x)$ będzie wielomianem stopnia n, którego współczynniki są w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$ oraz takim, który jest podzielny przez $(x - 1)^k$. Niech q będzie liczbą pierwszą taką, że $\frac{q}{\ln q} < \frac{k}{\ln(n+1)}$. Udowodnij, że pierwiastki z jedynki stopnia q (zespolone) są pierwiastkami $p(x)$.*

Zadanie 85 (IMC 2003)**.** *Niech $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokaż, że jeśli wszystkie pierwiastki f leżą w lewej półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, to $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$, zachodzi dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n - 3$.*

Zadanie 86 (IMC 2004)**.** *Niech $P(x) = x^2 - 1$. Ile różnych rozwiązań rzeczywistych ma następujące równanie:*

$$\underbrace{P(P(\ldots(P}_{2004}))\ldots) = 0?$$

Zadanie 87 (IMC 2005)**.** *Znajdź wszystkie wielomiany $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ spełniające następujące dwa warunki:*

(i $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ jest permutacją ciągu $(0, 1, \ldots, n)$,

(ii wszystkie pierwiastki $P(x)$ są wymierne.

Zadanie 88 (IMC 2006). *Niech f będzie funkcją wymierną (czyli ilorazem dwóch wielomianów rzeczywistych) oraz załóżmy, ze $f(n)$ jest liczbą całkowitą dla nieskończenie wielu n. Pokaż, że f jest wielomianem.*

Zadanie 89 (IMC 2007). *Jak wiele niezerowych współczynników może mieć wielomian $P(z)$, jeśli jego współczynnikami są liczby całkowite oraz $|P(z)| \leqslant 2$, dla każdego $|z| = 1$?*

Zadanie 90 (IMC 2008). *Niech V będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej oraz niech $P : V \to \mathbb{R}$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że dla wszystkich $f, g \in V$ takich, że $P(fg) = 0$ mamy $P(f) = 0$ lub $P(g) = 0$. Udowodnij, że istnieją liczby rzeczywiste x_0, c takie, że $P(f) = cf(x_0)$, dla wszystkich $f \in V$.*

Zadanie 91 (IMC 2009). *Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $\mathbb{F}_p$ będzie ciałem reszt z dzielenia przez p. Niech W będzie najmniejszym zbiorem wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{F}_p$ takich, że:*

- *wielomiany $x + 1$ oraz $x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^2 + 2x + 1$ są w W oraz*
- *dla każdych wielomianów $h_1(x)$ oraz $h_2(x)$ w W wielomian $r(x)$ będący resztą z dzielenia $h_1(h_2(x))$ przez $x^p - x$ jest również w W.*

Ile wielomianów liczy sobie zbiór W?

Zadanie 92 (IMC 2011). *Niech p będzie liczbą pierwszą. Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy interesującą, jeśli*

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + p \cdot g(x),$$

dla pewnych wielomianów f oraz g o współczynnikach całkowitych.

(a Udowodnij, że liczba $p^p - 1$ jest interesująca.

(b Dla jakich $p^p - 1$ liczba $p^p = 1$ jest minimalną liczbą interesującą?

Zadanie 93 (IMC 2011). *Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n. Załóżmy, że $\frac{f(k)-f(m)}{k-m}$ jest liczbą całkowitą, dla wszystkich liczb całkowitych $0 \leqslant k < m \leqslant n$. Pokaż, że $a - b$ dzieli $f(a) - f(b)$, dla wszystkich par różnych liczb całkowitych a, b.*

Zadanie 94 (IMC 2017). *Niech k, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $n \geqslant k^2 - 3k + 4$. Niech*

$$f(z) = z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych takim, że:

$$c_0c_{n-2} = c_1c_{n-3} = \ldots = c_{n-2}c_0 = 0.$$

Pokaż, że $f(z)$ oraz $z^n - 1$ mają co najwyżej $n - k$ wspólnych pierwiastków.

Zadanie 95 (IMC 2017). *Niech $p(x)$ będzie niestałym wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n określamy:*

$$q_n(x) = (x + 1)^n p(x) + x^n p(x + 1).$$

Pokaż, że istnieje jedynie skończenie wiele n takich, że wszystkie pierwiastki $q_n(x)$ są rzeczywiste.

Zadanie 96 (IMC 2018). *Wyznacz wszystkie pary monicznych wielomianów $P(x)$ oraz $Q(x)$ o współczynnikach zespolonych takich, że $P(x)$ dzieli $Q(x)^2+1$ oraz $Q(x)$ dzieli $P(x)^2+1$.*

Zadanie 97 (IMC 2020). *Wielomian p o współczynnikach rzeczywistych spełnia równanie $p(x+1)-p(x) = x^{100}$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Pokaż, ze $p(1-t) \geqslant p(t)$, dla $0 \leqslant t \leqslant 1/2$.*

6 Różne (raczej elementarne, ale niekoniecznie łatwe)

Zadanie 98 (IMC 1994). *Dany jest zbiór S złożony z $2n-1$ różnych liczb niewymiernych, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje n różnych elementów $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ takich, że dla wszystkich nieujemnych liczb wymiernych $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniających $a_! + a_2 + \ldots + a_n > 0$ mamy $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \notin \mathbb{Q}$.*

Zadanie 99 (IMC 1997). *Niech α będzie liczbą rzeczywistą, $1 < \alpha < 2$.*

(a Pokaż, że α ma jednoznaczne przedstawienie w postaci nieskończonego produktu:

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)\left(1 + \frac{1}{n_2}\right)\cdots$$

gdzie każda z n_i jest dodatnią liczbą całkowitą spełniającą $n_i^2 \leqslant n_{i+1}$.

(b Pokaż, że α jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy powyższy nieskończony produkt ma następującą własność: dla pewnego m oraz dla wszystkich $k \geqslant m$ mamy $n_{k+1} = n_k^2$.

Zadanie 100 (IMC 1999). *Załóżmy, ze $x_1, \dots, x_n \geqslant -1$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. Pokaż, że $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$.*

Zadanie 101 (IMC 2003). *Wyznacz wszystkie pary liczb (a,b) całkowitych dodatnich, dla których zbiór wszystkich liczb dodatnich rozłożyć można na sumę rozłączną zbiorów A oraz B takich, że $a \cdot A = b \cdot B$.*

Zadanie 102 (IMC 2005). *Udowodnij, że jeśli p oraz q są liczbami wymiernymi oraz $r = p + q\sqrt{7}$, to istnieje macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o wyrazach całkowitych, gdzie $ad - bc = 1$ taka, że:*

$$\frac{ar+b}{cr+d} = r.$$

Zadanie 103 (IMC 2006). *Znajdź liczbę dodatnich rozwiązań całkowitych x spełniających poniższe dwa warunki:*

- $x < 10^{2006}$,
- $x^2 - x$ *jest podzielny przez* 10^{2006}.

Zadanie 104 (IMC 2006). *Pokaż, że istnieje nieskończenie wiele par liczb względnie pierwszych (m,n) liczb dodatnich takich, że równanie $(x+m)^3 = nx$ ma trzy różne rozwiązania całkowite.*

Zadanie 105 (IMC 2007). *Niech x, y, z będą liczbami całkowity takimi, że $S = x^4 + y^4 + z^4$ jest podzielna przez 29. Pokaż, że S jest podzielna przez 29^4.*

Zadanie 106 (IMC 2008). *Mówimy, że trójka* (a_1, a_2, a_3) *rzeczywistych liczb nieujemnych jest lepsza niż inna trójka* (b_1, b_2, b_3), *jeśli zachodzą dwie z trzech następujących nierówności* $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3$. *Trójkę* (x, y, z) *nazywamy specjalną, jeśli* x, y, z *są nieujemne oraz* $x + y + z = 1$. *Znajdź wszystkie liczby naturalne* n, *dla których istnieje zbiór* S *złożony z* n *specjalnych trójek takich, że dla dowolnej specjalnej trójki istnieje co najmniej jedna lepsza trójka w* S.

Zadanie 107 (IMC 2008). *Niech* n *będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że* 2^{n-1} *dzieli*

$$\sum_{0 \leqslant k < n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

Zadanie 108 (IMC 2010). *Niech* a, b *będą liczbami całkowitymi i niech* n *będzie całkowitą liczbą dodatnią, dla której zbiór:*

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

jest skończony. Pokaż, że $n = 1$.

Zadanie 109 (IMC 2010). *Niech* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$, *dla wszystkich* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Pokaż, że:*

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Zadanie 110 (IMC 2013). *Niech* p, q *będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że:*

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{k}{q} \rfloor} = \begin{cases} 0 & \textit{jeśli } pq \textit{ jest parzyste ,} \\ 1 & \textit{jeśli } pq \textit{ jest nieparzyste .} \end{cases}$$

Zadanie 111 (IMC 2013). *Czy istnieje nieskończony zbiór* M *złożony z liczb całkowitych dodatnich taki, że dla każdych* $a, b \in M$ *takich, że* $a < b$ *suma* $a + b$ *jest bezkwadratowa?*

Zadanie 112 (IMC 2014). *Niech* $n > 6$ *będzie liczbą doskonałą (suma dzielników liczby* n *równa jest* $2n$*) i niech* $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ *będzie jej rozkładem na czynniki pierwsze, gdzie* $1 < p_1 < \ldots < p_k$. *Pokaż, że* e_1 *jest liczbą parzystą.*

Zadanie 113 (IMC 2019). *Wyznacz iloczyn*

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}.$$

Zadanie 114 (IMC 2020). *Znajdź wszystkie liczby pierwsze* p, *dla których istnieje jedyne takie* $a \in \{1, 2, \ldots, p\}$, *że* $a^3 - 3a + 1$ *jest podzielna przez* p.

7 Różne (struktury algebraiczne)

Zadanie 115 (IMC 1996). *Niech* G *będzie podgrupą* $GL_2(\mathbb{R})$ *generowaną przez macierze* A, B, *gdzie:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech H *składa się z takich macierzy w* G, *które na przekątnej mają jedynki.*

- *Pokaż, że H jest podgrupą abelową w G.*
- *Pokaż, że H nie jest skończenie generowana.*

Zadanie 116 (IMC 1998)**.** *Udowodnij, że poniższe zdanie jest prawdziwe dla $n = 3, 5$ oraz nie jest prawdziwe dla $n = 4$: „Dla każdej permutacji π_1 zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ niebędącej identycznością istnieje permutacja π_2 taka, że każda permutacja π może być otrzymana z π_1, π_2 przy użyciu jedynie złożeń (dla przykładu: $\pi = \pi_1 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$)".*

Zadanie 117 (IMC 1999)**.** *Załóżmy, że w niekoniecznie przemiennym pierścieniu R kwadrat każdego elementu równy jest zero. Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c \in R$ mamy $abc + abc = 0$.*

Zadanie 118 (IMC 1999)**.** *Niech S będzie zbiorem wszystkich słów złożonych z liter x, y, z. Rozważmy relację równoważności $\sim$ na S spełniającą następujące warunki: dla dowolnych słów $u, v, w \in S$:*

- *$uu \sim u$,*
- *jeśli $v \sim w$, to $uv \sim uw$ oraz $vu \sim wu$.*

Pokaż, że każde słowo w S jest równoważne ze słowem długości co najwyżej 8.

Zadanie 119 (IMC 2000)**.** *Niech R będzie pierścieniem charakterystyki zero[2] (niekoniecznie przemiennym). Niech e, f oraz g będą idempotentami[3] w R spełniającymi $e + f + g = 0$. Pokaż, że $e = f = g = 0$.*

Zadanie 120 (IMC 2001)**.** *Niech r, s, t będą dodatnimi liczbami całkowitymi parami względnie pierwszymi. Pokaż, że jeśli a, b są elementami przemiennej multyplikatywnej grupy z elementem neutralnym e oraz $a^r = b^s = (ab)^t = e$, to $a = b = e$.*

Zadanie 121 (IMC 2001)**.** *Niech $A = (a_{k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ będzie zespoloną macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że dla każdego $m \in \{1, \dots, n\}$ oraz $1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n$ wyznacznik macierzy $(a_{j_k, j_l})_{k,l=1,\dots,m}$ równy jest zero. Wykaż, że $A^n = 0$ oraz, że istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że macierz $(a_{\sigma(k),\sigma(l)})_{k,l=1,\dots,n}$ jest ściśle górnotrójkątna.*

Zadanie 122 (IMC 2004)**.** *Niech $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ będą niezerowymi elementami pewnego ciała. Zastępujemy każdy z elementów sumą pozostałych 50. W ten sposób uzyskujemy ciąg $b_1, \dots, b_{51}$. Co można powiedzieć o charakterystyce tego ciała, jeśli wiadomo, że uzyskany ciąg ten jest permutacją wyjściowego?*

Zadanie 123 (IMC 2005)**.** *Dla grupy G przez $G(m)$ oznaczamy podgrupę generowaną przez m-te potęgi elementów z G. Pokaż, że jeśli $G(m)$ oraz $G(n)$ są przemienne, to $G(NWD(m, n))$ jest również przemienna.*

Zadanie 124 (IMC 2007)**.** *Niech G będzie grupą skończoną. Dla dowolnych zbiorów $U, V, W \subset G$, przez N_{UVW} oznaczamy liczbę trójek $(x, y, z) \in U \times V \times W$, dla których xyz jest elementem neutralnym. Przypuśćmy, że G jest sumą rozłączną trzech zbiorów A, B, C. Pokaż, że $N_{ABC} = N_{CBA}$.*

Zadanie 125 (IMC 2008)**.** *Czy istnieje skończona grupa G o podgrupie normalnej H taka, że $|AutH| > |AutG|$?*

[2] Pierścień R ma charakterystykę zero jeśli da każdego $a \in R$ oraz dodatniej liczby całkowitej n mamy $na \neq 0$, dla $a \neq 0$.
[3] Element x pierścienia R nazywamy idempotentnych, jeśli $x = x^2$.

Zadanie 126 (IMC 2010)**.** *Oznaczmy przez S_n grupę permutacji ciągu $(1, 2, \ldots, n)$. Załóżmy, że S jest podgrupą S_n taką, że dla każdego $\pi \in G \setminus \{e\}$ istnieje jednoznacznie wyznaczone $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla którego $\pi(k) = k$ (element e jest neutralny w S_n). Pokaż, że k jest takie same dla wszystkich $\pi \in G \setminus \{e\}$.*

Zadanie 127 (IMC 2018)**.** *Czy istnieje ciało, którego grupa multyplikatywna jest izomorficzna z jego grupą addytywną?*

Zadanie 128 (IMC 2020)**.** *Niech G będzie grupą oraz niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Niech H_1, H_2 będą dwiema podgrupami G, spełniającymi*

$$[G : H_1] = [G : H_2] = n, \quad [G : (H_1 \cap H_2] = n(n-1).$$

Pokaż, że H_1, H_2 są sprzężone w G.

Zadanie 129 (IMC 2021)**.** *Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ będzie grupą odwracalnych macierzy 2×2 o wyrazach będących resztami modulo p oraz niech S_p będzie grupą symetryczną (grupą permutacji) na zbiorze p-elementowym. Pokaż, że nie istnieje monomorfizm $\phi : GL_2(\mathbb{Z}_p) \to S_p$.*

Zadanie 130 (IMC 2022)**.** *Niech G będzie grupą oraz niech $n \neq 2$ będzie liczbą całkowitą. Niech H_1, H_2 będą podgrupami G spełniającymi:*

$$[G : H_1] = [G : H_2] = n \quad \text{ oraz } \quad [G : (H_1 \cap H_2)] = n(n-1).$$

Pokaż, ze H_1 oraz H_2 są sprzężone w G, tzn. istnieje $g \in G$ takie, że $g^{-1} H_1 g = H_2$.

Zadania konkursowe i materiały treningowe

- Strona IMC: `https://www.imc-math.org.uk/`
- Strona Putnama: `https://www.maa.org/math-competitions/putnam-competition`
- Vojtěch Jarník International Mathematical Competition: `https://vjimc.osu.cz/problems`
- Undergraduate Contest w: `Contest Collections na AOPS`
- Strona Eda Barbreau: `http://www.math.utoronto.ca/barbeau/home.html#undergraduates`
- Strona Tomasza Tkocza (Teaching, Problem Solving Seminar 13/14): `https://www.math.cmu.edu/~ttkocz`
- IMC Seminar (Warwick): `https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/research/events/seminars/areas/imc/`