# GAL II*, Zestaw dodatkowy zadań domowych

**Data zwrotu: 8 czerwca 2021, 12:15 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).**

**Zadanie 1.** *Rozważmy endomorfizm* $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^8)$ *zadany macierzą*

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Wyznacz wielomian minimalny* $m_f$ *oraz bazę Jordana endomorfizmu* $f$.

**Zadanie 2.** *Niech* $n \geqslant 1$. Eksponentę *macierzy* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *definiujemy wzorem*

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

*Pokaż, że*

- *powyższa definicja jest poprawna (tzn. szeregi definiujące wyrazy macierzy* $\exp A$ *są zbieżne).*
- $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$ *dla każdych macierzy* $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *spełniających* $AB = BA$. *Czy bez założenia* $AB = BA$ *równość* $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$ *pozostaje prawdziwa?*
- *Oblicz* $\exp A$ *dla* $A = J_n(\lambda)$, *gdzie* $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Zadanie 3.** *Niech* $n \geqslant 1$ *oraz* $V = \mathbb{R}^n$. *Rozważmy formy kwadratowe* $p, q$ *na* $V$ *dane wzorami:*

$$p((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} (i+j) x_i x_j, \qquad q((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} |i-j| x_i x_j.$$

*Oblicz rzędy i sygnatury form* $p, q$ *oraz zbadaj ich określoność.*

**Zadanie 4.** *Załóżmy, że* $V$ *jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Pokaż, że gdy zbiór* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *jest bazą ortonormalną przestrzeni* $V$, *zaś wektory* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *spełniają* $\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^2 < 1.$, *to zbiór* $B = \{e_1 + v_1, \ldots, e_n + v_n\}$ *jest bazą przestrzeni* $V$.

**Zadanie 5.** *Niech* $p$ *będzie liczbą pierwszą. W przestrzeni* $V = F(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R})$ *rozważmy iloczyn skalarny dany formułą*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}_p} f(k) g(k).$$

*Zdefiniujmy* $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ *wzorem*

$$\Phi(f)(k) = \frac{f(k-1) + f(k+1)}{2} - f(k)$$

*dla* $f \in V$ *oraz* $k \in \mathbb{Z}_p$. *Udowodnij, że endomorfizm* $\Phi$ *jest samosprzężony. Opisz* $\mathrm{Ker}\,\Phi$ *oraz pokaż, że wszystkie niezerowe wartości własne endomorfizmu* $\Phi$ *są ujemne.*

**Zadanie 6.** *Załóżmy, że* $A = [a_{ij}] \in SO(3)$. *Sprawdź, że:*

- $(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2 = 2 \operatorname{tr} A$.
- $(\operatorname{tr} A - 1)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$.

**Zadanie 7.** *Niech*

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b\},$$
$$B = \operatorname{lin}\{(a_1, a_2, a_3, a_4)\},$$

*gdzie* $0 \neq (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ *oraz* $b \in \mathbb{R}$. *Wyznacz wzór odwzorowania afinicznego* $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *będącego rzutem na* $A$ *wzdłuż* $B$.

**Zadanie 8.** *Załóżmy, że* $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$. *Wykaż, że:*

- *gdy* $f$ *jest obrotem, to* $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ *dla* $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- *gdy* $f$ *spełnia* $\operatorname{Ker} f \neq 0$ *oraz* $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ *dla* $u, v \in \mathbb{R}^3$, *to* $f = 0$.
- *gdy* $f$ *spełnia* $\operatorname{Ker} f = 0$ *oraz* $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ *dla* $u, v \in \mathbb{R}^3$, *to* $f$ *jest obrotem.*

**Zadanie 9.** *Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową* $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$. *Niech* $A, B$ *będą dwoma rozłącznymi niepustymi podzbiorami wypukłymi w* $\mathbb{R}^n$. *Wówczas istnieje niezerowy wektor* $v \in \mathbb{R}^n$ *oraz liczba rzeczywista* $c$ *taka, że:*

$$\langle v, x \rangle \geqslant c, \quad \langle v, y \rangle \leqslant c,$$

*dla każdego* $x \in A$ *oraz dla każdego* $y \in B$. *Innymi słowy: istnieje funkcjonał* $f$ *na* $\mathbb{R}^n$ *taki, że:*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant c, & \text{dla każdego } x \in A, \\ f(x) \leqslant c, & \text{dla każdego } y \in B. \end{cases}.$$

**Zadanie 10.** *Pokazać, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *mają nieujemne części rzeczywiste, wówczas również wszystkie pierwiastki wielomianu* $f'(x)$ *mają nieujemne wartości rzeczywiste. Wywnioskować stąd, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu* $f \in \mathbb{C}[x]$ *zawarte są w pewnym zbiorze wypukłym* $D$ *(na płaszczyźnie zespolonej), wówczas wszystkie pierwiastki* $f'(x)$ *również są w* $D$.